Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 11 vom 9. Januar 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Körper aus Polynomen). Wiederholen Sie, warum folgende Konstruktion funktioniert: Ist K ein Körper und $f \in K[T]$ irreduzibel, so ist $K[T]/(f)$ ein Körper.

Fingerübung B (Körper?). Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Körper bezüglich den gewöhnlichen arithmetischen Operationen auf $\mathbb{C}$?

1. $\{a + i \cdot \sqrt{3} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{a + i \cdot \sqrt{3} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
3. $\{a + i \cdot \sqrt{3} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
4. $\{a + i \cdot \sqrt{3} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{C}\}$

Fingerübung C (Körperhomomorphismen). Sei K einer der folgenden Körper. Entscheiden Sie jeweils, ob es mehr als einen Körperhomomorphismus $K \longrightarrow K$ gibt.

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{C}, \quad \mathbb{F}_7, \quad \mathbb{F}_3[T]/(T^2+1)$$

Fingerübung D (Einheiten). Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ eine Untergruppe enthält, die zu $\mathbb{Z}/n$ isomorph ist.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (letzte Ziffern; 2 (=0+2) Punkte).

0. Wiederholen Sie den *kleinen Satz von Fermat*.
1. Bestimmen Sie die letzten beiden Ziffern von 2026^{2020} im Siebenersystem.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (ungerade Grade; 4 Punkte). Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$ mit $[K(\alpha) : K] = 2025$. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.
Hinweis. Was wissen Sie über $[K(\alpha) : K(\alpha^2)]$?

Aufgabe 2 (Charakteristik; 4 (=2+2) Punkte). Seien K und L Körper. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $L \mid K$ eine Körpererweiterung, so gilt $\operatorname{char} K = \operatorname{char} L$.
2. Ist $\operatorname{char} K = \operatorname{char} L$, so ist $L \mid K$ eine Körpererweiterung.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Primkörper; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass K genau einen bezüglich Inklusion kleinsten Körper enthält, den *Primkörper von* K.

2. Zeigen Sie:

   - Ist $\operatorname{char} K = 0$, so ist der Primkörper von K isomorph zu $\mathbb{Q}$.
   - Ist $p \in \mathbb{N}$ prim und $\operatorname{char} K = p$, so ist der Primkörper von K isomorph zu $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 4 (Frobenius; 4 (=1+1+1+1) Punkte)**.** Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, sei K ein Körper der Charakteristik p und sei

$$\begin{aligned} F\colon K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$

der *Frobeniusendomorphismus*.

1. Zeigen Sie, dass F tatsächlich ein Ringhomomorphismus ist.

2. Wie kann man den Frobeniusendomorphismus von $\mathbb{F}_p$ auch beschreiben?

3. Zeigen Sie: Ist K endlich, so ist F ein Isomorphismus.

4. Zeigen Sie: Ist K unendlich, so ist F im allgemeinen *kein* Isomorphismus.

Bonusaufgabe (Origami-Konstruierbarkeit; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie *Origami-Konstruierbarkeit* (analog zur Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal) definiert ist.

2. Skizzieren Sie einen Beweis dafür, dass die Menge der in $\mathbb{C}$ aus $\{0, 1\}$ Origami-konstruierbaren Punkte einen Körper bildet.

Hinweis. Im Sinne der guten wissenschaftlichen Praxis: Geben Sie vollständige, nachvollziehbare Quellen an.