Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 12 vom 16. Januar 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Grade)**.** Wiederholen Sie den Begriff des *Grads* einer Körpererweiterung und bestimmen Sie zu jeder der folgenden Körpererweiterungen den Grad:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2026}) \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(i) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2026}) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}(T) \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{R} \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(T) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{C} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{R}(i) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{R}(2026 \cdot i) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q}(i) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{F}_7[T, X]/(T^2 + 1, X^3 + 2) \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{F}_7[T]/(T^2 + 1) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{F}_7[X]/(X^3 + 2) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{F}_7 &
\end{tikzcd}$$

Fingerübung B (algebraische Zahlen)**.** Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$\alpha^5 + 2 \cdot \alpha^3 - 42 \cdot \alpha + 402 = 0.$$

Schreiben Sie die folgenden Zahlen als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, \alpha, \dots, \alpha^4$:

$$\alpha^5, \quad \alpha^6, \quad \frac{1}{\alpha}.$$

Fingerübung C (Minimalpolynome)**.** Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen das Minimalpolynom über den angegebenen Grundkörpern:

1. von $\sqrt{2026}$ über $\mathbb{Q}$
2. von $\sqrt{2026}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2026})$
3. von $\sqrt{2026}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2026})$
4. von $\sqrt{2026}$ über $\mathbb{R}$

Fingerübung D (Zwischenkörper)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und seien $S, S' \subset L$. Zeigen Sie:

$$\big(K(S)\big)(S') = K(S \cup S') = K(S) \cdot K(S')$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, knnen aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (irreduzibel? 2 (=0+2) Punkte)**.**

0. Wiederholen Sie die behandelten *Irreduzibilitätskriterien*. Achten Sie auf vollständige Voraussetzungen und präzise Formulierungen!
1. Ist das Polynom $3 \cdot T^{2026} + 424242 \cdot T^{42} + 123456789$ in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (ein Zerfällungskörper von $T^4 - 42$ über $\mathbb{Q}$; 4 (=2+2) Punkte)**.** Wir betrachten den Zwischenkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{42}, i)$ in $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}$. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Liegen alle komplexen Nullstellen von $T^4 - 42$ in K ? Liegen alle komplexen Nullstellen von $T^4 - 42$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{42})$? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ mit
$$\frac{1}{\sqrt[4]{42} - 1} = a + b \cdot \sqrt[4]{42} + c \cdot \sqrt{42} + d \cdot \sqrt{42} \cdot \sqrt[4]{42}.$$

3. Zeigen Sie, dass $[K : \mathbb{Q}] = 8$ ist.

   Hinweis. Zeigen Sie zunächst $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{42}) \cap \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}$. Warum hilft das?

4. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Gal}(K, \mathbb{Q})$ *kein* Element der Ordnung 8 enthält.

   Hinweis. Wieviele Nullstellen haben $T^4 - 42$ bzw. $T^2 + 1$ in K ?

Aufgabe 2 (algebraische Zahlen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $K(\alpha) = K(\beta)$, so haben α und β dasselbe Minimalpolynom über K.

2. Haben α und β dasselbe Minimalpolynom über K, so ist $K(\alpha) = K(\beta)$.

Aufgabe 3 (algebraische Erweiterungen; 4 Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei M ein Zwischenkörper von $L \mid K$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Körpererweiterung $L \mid K$ ist algebraisch.

2. Die Körpererweiterungen $L \mid M$ und $M \mid K$ sind algebraisch.

Aufgabe 4 (Grade von Komposita; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und seien M, N Zwischenkörper von $L \mid K$.

1. Zeigen Sie, dass $[M \cdot N : M] \leq [N : K]$ ist.

   Hinweis. Ist $[N : K]$ endlich, so ist $N \mid K$ insbesondere auch endlich erzeugt und man kann induktiv argumentieren ...

2. Folgern Sie: Ist $\operatorname{ggT}\bigl([M : K], [N : K]\bigr) = 1$, so ist
$$[M \cdot N : K] = [M : K] \cdot [N : K].$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & M \cdot N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ M \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Bonusaufgabe (Transzendenz; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die reelle Zahl
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001000000000000000001\ldots$$
über $\mathbb{Q}$ transzendent ist.

Hinweis. Warum ist diese Zahl nicht rational? Zeigen Sie, dass sich algebraische Zahlen „nicht zu gut durch rationale Zahlen" approximieren lassen. Schließen Sie dann daraus, dass die obige Zahl nicht algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.

Abgabe bis 23. Januar 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS