Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann | Blatt 13 vom 23. Januar 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Symmetrien). Wiederholen Sie Grundlagen zu Symmetrien, d.h. zu *Gruppenoperationen* und zu *symmetrischen Gruppen*.

Fingerübung B (Konjugationsprinzip für algebraische Zahlen). Wir betrachten den Zwischenkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2026}, i, \zeta_5)$ von $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}$. Sei $\sigma \in \operatorname{Gal}(K, \mathbb{Q})$. Welche der folgenden Gleichungen sind möglich?

1. $\sigma(i) = -i$
2. $\sigma(\sqrt[5]{2026}) = -i$
3. $\sigma(\zeta_5) = -\zeta_5$
4. $\sigma(\zeta_5) = {\zeta_5}^4$

Fingerübung C (Galoisgruppe). Bestimmen Sie $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i), \mathbb{Q})$ mit dem Konjugationsprinzip. Wieviele Elemente enthält diese Gruppe? Wie kann man diese Elemente explizit beschreiben? Welchen Isomorphietyp hat diese Gruppe? Ist diese Gruppe abelsch, zyklisch, ... ?

Fingerübung D (Zerfällungskörper).

1. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_2) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^4 - 1$ über $\mathbb{Q}$?
2. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_4) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^2 - 1$ über $\mathbb{Q}$?
3. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_5) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^5 - 1$ über $\mathbb{Q}$?
4. Ist $\mathbb{Q}(\zeta_5) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $(T - 1)^5$ über $\mathbb{Q}$?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Körper; 2 (=0+2) Punkte).

0. Wiederholen Sie *Grundlagen zu Körpern* (Charakteristik, Primkörper, endliche Untergruppen der Einheitengruppe).
1. Geben Sie je eine Verknüpfungstabelle für die Addition und die Multiplikation auf dem Körper $\mathbb{F}_2[T]/(T^2 + T + 1)$ an. Wie haben Sie diese Verknüpfungstabellen bestimmt?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (Wurzeln; 4 (= 2+2) Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sei K ein Körper, der ein Zerfällungskörper von $T^n - 1 \in K[T]$ über K ist (d.h. $T^n - 1$ zerfällt über K in Linearfaktoren), und sei $c \in K \setminus \{0\}$. Außerdem sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ mit $\alpha^n = c$.

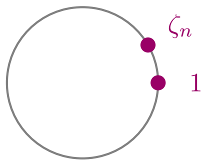
1. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) \subset L$ ein Zerfällungskörper von $T^n - c$ über K ist.
2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Gal}(K(\alpha), K)$ zyklisch ist.

   Hinweis. Konstruieren Sie mithilfe des Konjugationsprinzips und einer primitiven n-ten Einheitswurzel einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $\operatorname{Gal}(K(\alpha), K)$ in eine zyklische Gruppe.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Zerfällungskörper; 4 (=2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es ist $\mathbb{Q}(\zeta_6) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $(T^3 - 1) \cdot (T^6 - 1)$ über $\mathbb{Q}$.
2. Es ist $\mathbb{R}(\zeta_3) \subset \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $T^3 - 2$ über $\mathbb{R}$.



Aufgabe 3 (Fixkörper; 4 (=1+1+1+1) Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Körpererweiterung, sei $G \subset \operatorname{Gal}(L, K)$ eine Untergruppe und sei

$$M := L^G := \{x \in L \mid \forall_{\sigma \in G} \quad \sigma(x) = x\}$$

der *Fixkörper von* $L \mid K$ *bezüglich* G. Sei $\alpha \in L$.

1. Zeigen Sie, dass M ein Zwischenkörper von $L \mid K$ ist.
2. Sei $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ eine maximale Familie in G, für die $\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_m(\alpha)$ alle verschieden sind, und sei

$$f := \prod_{j=1}^{m} \bigl(T - \sigma_j(\alpha)\bigr) \in L[T].$$

   Zeigen Sie, dass f bereits in $M[T]$ liegt.
3. Zeigen Sie, dass $[M(\alpha) : M] \leq \#G$.
4. Zeigen Sie: Das Minimalpolynom von α über M zerfällt in L in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

Aufgabe 4 (Ableitungskriterium; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei $f \in K[T] \setminus K$ normiert und sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung mit der Eigenschaft, dass f in $L[T]$ in Linearfaktoren zerfällt.

1. Zeigen Sie, dass f genau dann eine mehrfache Nullstelle in L besitzt, wenn $\operatorname{ggT}(f, Df) \neq 1$ in $L[T]$ gilt (Bonusaufgabe: in $K[T]$).
2. Zeigen Sie: Ist $f \in K[T]$ irreduzibel, so besitzt f genau dann eine mehrfache Nullstelle in L, wenn $Df = 0$ ist.

Bonusaufgabe (endliche Körper für Schüler; 4 Punkte)**.** Entwickeln Sie eine Anleitung und vier Aufgaben, womit (Mittelstufen-)schüler lernen können, dass es einen Körper mit genau vier Elementen gibt. Entwerfen Sie zusätzlich einen Lösungsvorschlag, der den zu erwartenden Kenntnissen solcher Schüler angemessen ist.
Hinweis. Mittelstufenschüler kennen die Definition des Begriffs *Körper* nicht! Es schadet außerdem nicht, wenn die Anleitung auch einen Absatz dazu enthält, warum man sich für so etwas interessieren könnte.

Abgabe bis 30. Januar 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Alle Punkte von Blatt 14 zählen als Bonuspunkte.