Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 14 vom 30. Januar 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Auflösbarkeit). Wiederholen Sie den Begriff der *Auflösbarkeit* aus der Gruppentheorie. Wie kann man in diesem Kontext die *Sylowsätze* einsetzen?

Fingerübung B ($\mathbb{F}_{16}$). Beantworten Sie die folgenden Fragen mithilfe des Klassifikationssatzes für endliche Körper:

1. Wie kann man $\mathbb{F}_{16}$ aus $\mathbb{F}_2$ konstruieren? Wie sieht der Frobeniusendomorphismus $\sigma\colon \mathbb{F}_{16} \longrightarrow \mathbb{F}_{16}$ in dieser Beschreibung aus?
2. Warum besitzt $\mathbb{F}_{16} \mid \mathbb{F}_2$ genau einen Zwischenkörper K mit $\#K = 4$?
3. Welche Potenzen von σ liegen in $\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_{16}, K)$?
4. Warum besitzt $\mathbb{F}_8 \mid \mathbb{F}_2$ *keinen* Zwischenkörper K mit $\#K = 4$?

Fingerübung C (normale Körpererweiterungen). Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal?

1. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2026}) \mid \mathbb{Q}(\sqrt{2026})$
2. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2026}) \mid \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
3. $\mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{2026}) \mid \mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2026}) \mid \mathbb{Q}$

Fingerübung D (primitive Elemente). Bestimmen Sie ein primitives Element für die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2}) \mid \mathbb{Q}$.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, knnen aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Grade; 2 (=0+2) Punkte).

0. Wiederholen Sie den Begriff des *Grades* einer Körpererweiterung.
1. Wir betrachten die Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[42]{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{42})$ von $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt[42]{5}, \sqrt[5]{42}) : \mathbb{Q}(\sqrt[5]{42})]$. Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Wiederholung) (fünfzehn I; 2 (=1+1) Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\bigl(\mathbb{Z}/(15)\bigr)^\times \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$.
2. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$.

   Hinweis. Es sind acht.

Bitte wenden

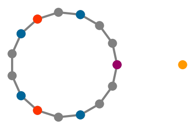
Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (fünfzehn II; 4 (= 2+2) Punkte)**.** Sei $\zeta_{15} := e^{2\cdot\pi\cdot i/15} \in \mathbb{C}$.

1. Bestimmen Sie für jedes Element von $\operatorname{Gal}\bigl(\mathbb{Q}(\zeta_{15}), \mathbb{Q}\bigr)$, worauf ζ_{15} abgebildet wird und geben Sie in dieser Beschreibung einen Gruppenisomorphismus $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{15}), \mathbb{Q}) \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ an.

2. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_{15}) \mid \mathbb{Q}$.

   Hinweis. Geben Sie primitive Elemente an. Was hat das mit $\sqrt{5}$ zu tun?!



Hinweis. Falls Ihnen „fünfzehn“ zu übermütig erscheint, können Sie alternativ die entsprechenden Fragen für „fünf“ bearbeiten.

Aufgabe 2 (Galoiskorrespondenz; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung mit $\operatorname{Gal}(L, K) \cong_{\mathsf{Group}} A_5$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt einen Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $[M : K] = 2$.

2. Es gibt einen Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $\#\operatorname{Gal}(L, M) = 5$.

Aufgabe 3 (schon wieder fünfzehn; 4 Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine Galoiserweiterung vom Grad 15. Zeigen Sie: Ist M ein Zwischenkörper von $L \mid K$, so ist auch $M \mid K$ eine Galoiserweiterung.
Hinweis. Es war einmal ein Sylowsatz ...

Aufgabe 4 (Klassifikation endlicher Körpererweiterungen von endlichen Körpern; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei F ein endlicher Körper und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

1. Zeigen Sie: Bis auf Isomorphie gibt es genau eine Körpererweiterung $L \mid F$ über F vom Grad k.

   Hinweis. Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $T^m - T$ ein Teiler von $T^{m^n} - T$ in $K[T]$ ist. Warum hilft das?

2. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe dieser Körpererweiterung $L \mid F$ isomorph zu $\mathbb{Z}/k$ ist (erzeugt von einer geeigneten Potenz des Frobeniusendomorphismus von L).

Bonusaufgabe (Geschichte; 4 Punkte)**.** Beantworten Sie für

Gauß, Galois, E. Artin, Kummer

die folgenden Fragen:

- Wann haben sie gelebt und (wo) hängt ihr Bild in der Fakultät für Mathematik?
- Was haben sie mit Galoistheorie zu tun?

Keine Abgabe!