Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 15 vom 6. Februar 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: alles!). Wiederholen Sie das Material der gesamten Vorlesung. Organisieren Sie das Material so, dass Sie es sich gut merken können. Was ist wichtig? Überlegen Sie sich einfache Fragen/Aufgaben dazu!
Hinweis. Machen Sie sich nicht verrückt! Manchmal ist es besser, ausgeschlafen zu sein statt bis zur letzten Sekunde Material einzufüllen.

Fingerübung B (Galoiskorrespondenz). Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung mit $\operatorname{Gal}(L, K) \cong_{\mathsf{Group}} S_5$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

1. Es gilt $[L : K] = 5$.
2. Es gibt Zwischenkörper M von $L \mid K$, für die $M \mid K$ nicht normal ist.
3. Es gibt Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $\operatorname{Gal}(L, M) \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/30$.
4. Es gibt Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $[M : K] = 2$.
5. Es gibt Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $\#\operatorname{Gal}(L, M) = 3$.
6. Es gibt Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $\#\operatorname{Gal}(L, M) = 2026$.

Fingerübung C (Realisierung als Galoisgruppen). Geben Sie für die folgenden Gruppen G eine endliche Galoiserweiterung über $\mathbb{Q}$ an, deren Galoisgruppe zu G isomorph ist. Was wissen Sie dann über die Zwischenkörper dieser Erweiterung?

1. $\mathbb{Z}/2$
2. $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$
3. $\mathbb{Z}/4$
4. S_3

Fingerübung D (Durcheinander).

1. Sind alle Untergruppen von S_5 mit genau acht Elementen isomorph zueinander?
2. Bestimmen Sie die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung von 111213^{1415}.
3. Ist $\mathbb{Z}[T]/(T^2 + T + 1)$ ein Körper?
4. Ist $\mathbb{Q}[T]/(T^2 + T + 1)$ ein Körper?
5. Konstruieren Sie einen Körper mit genau acht Elementen.
6. Ist die Körpererweiterung $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ algebraisch?

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (Triangulatur des Quadrats).

1. Zeigen Sie algebraisch, dass man aus den vier Ecken des Einheitsquadrats in $\mathbb{C}$ mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Flächeninhalt konstruieren kann.

2. Beschreiben Sie geometrisch wie man mit Zirkel und Lineal aus den vier Ecken des Einheitsquadrats in $\mathbb{C}$ ein gleichseitiges Dreieck mit demselben Flächeninhalt konstruieren kann.

Aufgabe 2 (Auflösbarkeit durch Radikale). Sei $f \in \mathbb{Q}[T]$ ein normiertes Polynom und sei G die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $\#G = 2048$, so ist f über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar.

2. Ist $\deg f = 2048$, so ist f über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar.

Aufgabe 3 (Rarität von Einheitswurzeln). Sei $L \mid \mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass L nur endlich viele Einheitswurzeln enthält.
Hinweis. Was passiert mit $\varphi(n)$ für $n \to \infty$?!

Aufgabe 4 (Winkeldreiteilung).

1. Geben Sie eine präzise Definition von „konstruierbaren Winkeln“ (mit Zirkel und Lineal) und der „Konstruierbarkeit der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal“.

2. Zeigen Sie: Im allgemeinen ist *nicht* für jeden mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkel auch die zugehörige Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Bonusaufgabe (zyklische Erweiterungen). Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und K enthalte n verschiedene n-te Einheitswurzeln. Sei $L \mid K$ eine Galoiserweiterung mit $\operatorname{Gal}(L, K) \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/n$. Zeigen Sie, dass es dann ein $c \in K$ gibt, so dass L ein Zerfällungskörper von $T^n - c$ über K ist.
Hinweis. Sei $\sigma \in \operatorname{Gal}(L, K) \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/n$ ein Erzeuger.

1. Fassen Sie σ als K-linearen Endomorphismus von L auf und zeigen Sie, dass es eine primitive n-te Einheitswurzel gibt, die ein Eigenwert von σ ist. Sei $\alpha \in L$ ein zugehöriger Eigenvektor.

2. Zeigen Sie, dass $c := \alpha^n$ in K liegt (Fixkörper!).

3. Erinnern Sie sich daran, dass $K(\alpha) \subset L$ ein Zerfällungskörper von $T^n - c$ über K ist (Aufgabe 13.1).

4. Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$ ist (Grade?!).

Keine Abgabe!