Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 3 vom 31. Oktober 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Produkte, direkte Summen)**.** Wiederholen Sie die Konstruktion von *direkten Produkten* und *direkten Summen* von Vektorräumen bzw. Moduln in der linearen Algebra. Welche universellen Eigenschaften haben diese Konstruktionen?

Fingerübung B (Quotientengruppen)**.** Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe, die sowohl eine Quotientengruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2025$ als auch eine Quotientengruppe isomorph zu S_{2025} besitzt.

Fingerübung C (Gruppoku)**.** Vervollständigen Sie die untenstehende Tabelle so, dass sich eine Verknüpfungstabelle für eine Gruppe mit den acht (verschiedenen) Elementen x, a, b, c, X, A, B, C ergibt.

·	x	a	b	c	X	A	B	C
x	x							
a		X	c			x		
b		C	X					
c				X				
X					x			
A								
B								
C								

Ist diese Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/8$, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, D_4 ?

Fingerübung D (D_5)**.** Enthält D_5 einen Normalteiler N mit $\#N = 2$?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Gleichungen in Gruppen; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.** Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Für alle $g, h \in G$ gibt es ein $x \in G$ mit $x \cdot g \cdot x^{-1} = h$.
2. Für alle $g, h \in G$ gibt es ein $x \in G$ mit $g \cdot x \cdot h = h \cdot g$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (Diedergruppen; 4 (=0+2+2) Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

0. Wiederholen Sie den Begriff der *Diedergruppe* D_n. Welche geometrische Relevanz hat sie?
1. Zeigen Sie, dass D_n zu einer Untergruppe von S_n isomorph ist.

   Hinweis. Verwenden Sie die geometrische Beschreibung von D_n.
2. Sei $\varphi \colon D_n \longrightarrow S_n$ der in der ersten Teilaufgabe konstruierte injektive Gruppenhomomorphismus. Ist die durch φ definierte Gruppenoperation von D_n auf $\{1, \dots, n\}$ frei? Ist sie transitiv? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Quotientengruppen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Seien G und G' Gruppen und seien $N \subset G$, $N' \subset G'$ Normalteiler in G bzw. G'. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $N \cong_{\mathsf{Group}} N'$ und $G/N \cong_{\mathsf{Group}} G'/N'$, so folgt $G \cong_{\mathsf{Group}} G'$.

2. Ist $G \cong_{\mathsf{Group}} G'$ und $N \cong_{\mathsf{Group}} N'$, so folgt $G/N \cong_{\mathsf{Group}} G'/N'$.

Aufgabe 3 (semi-direkte Produkte; 4 (=0+1+2+1) Punkte)**.** Seien N, Q Gruppen und sei $\varphi\colon Q \longrightarrow \operatorname{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus.

0. Wiederholen Sie die Konstruktion des *semi-direkten Produkts* $N \rtimes_\varphi Q$.

1. Zeigen Sie, dass (e, e) das neutrale Element von $N \rtimes_\varphi Q$ ist.

2. Zeigen Sie: Ist $(n, q) \in N \rtimes_\varphi Q$, so ist $(\varphi(q^{-1})(n^{-1}), q^{-1})$ das Inverse von (n, q) in $N \rtimes_\varphi Q$.

3. Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass im allgemeinen (n^{-1}, q^{-1}) *nicht* das Inverse von (n, q) in $N \rtimes_\varphi Q$ ist.

Aufgabe 4 (spaltende Erweiterungen; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Sei G eine Gruppe, sei $N \subset G$ ein Normalteiler und sei $Q := G/N$, mit kanonischer Projaktion $\pi\colon G \longrightarrow G/N = Q$. Es gebe einen Gruppenhomomorphismus $s\colon Q \longrightarrow G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_Q$. Zeigen Sie: Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon Q \longrightarrow \operatorname{Aut}(N)$ mit
$$G \cong_{\mathsf{Group}} N \rtimes_\varphi Q.$$

2. Folgern Sie: Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon K^\times \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathrm{SL}_n(K))$ mit
$$\mathrm{GL}_n(K) \cong_{\mathsf{Group}} \mathrm{SL}_n(K) \rtimes_\varphi K^\times.$$

Bonusaufgabe (Formalisierung von Gruppen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Erweitern Sie die Lean 4-Datei

https://loeh.app.ur.de/teaching/algebra_ws2526/monoid.lean

um folgendes:

1. Ein theorem das formuliert, dass Inverse von invertierbaren Elementen in Monoiden eindeutig sind;

2. einen Beweis dieser Aussage.

Hinweis. Falls Sie Lean 4 nicht installieren möchten, können Sie im Browser https://live.lean-lang.org/ verwenden.

Es werden nur Abgaben korrigiert, die via GRIPS als Quellcode-Textdatei abgegeben werden, die vom Lean 4-Interpreter fehlerfrei akzeptiert werden und aussagekräftig dokumentiert sind.

Abgabe bis 7. November 2025, 8:25, via Briefkasten/GRIPS