Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 4 vom 7. November 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Basen)**.** Wiederholen Sie die *universelle Eigenschaft von Basen* aus der Linearen Algebra.

Fingerübung B (Konjugationsoperation)**.** Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \varrho\colon G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ g &\longmapsto c_g := (x \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}) \end{aligned}$$

eine Gruppenoperation von G auf G definiert und dass der Stabilisator von $x \in G$ der Zentralisator $Z_G(x)$ von $x \in G$ ist.

Fingerübung C (Konjugation von Matrizen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Konjugationsoperation

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ (S, A) &\longmapsto S \cdot A \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auf $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Was sind die Bahnen dieser Operation?
Hinweis. Jordansche Normalform!

Fingerübung D (endliche abelsche Gruppen)**.** Bestimmen sie für jede der folgenden Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Klassifikation der abelschen Gruppen mit genau n Elementen:

$$2025, \quad 2026, \quad 2027, \quad 2028, \quad 2029, \quad 2030$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (symmetrische Gruppen; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.** Sei $H := \langle (1\ 2), (3\ 4) \rangle_{S_4}$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Ist H ein Normalteiler von S_4 ?
2. Welchen Index hat die Untegruppe H von S_4 ?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (endliche abelsche Gruppen; 4 (=0+3+1) Punkte)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$ Primzahlen mit $p \neq q$.

0. Wiederholen Sie den *Klassifikationssatz* für endliche abelsche Gruppen.
1. Bestimmen Sie ein Repräsentantensytem für die Isomorphieklassen abelscher Gruppen A mit $\#A = p^2 \cdot q^2$.
2. Folgern Sie, dass jede abelsche Gruppe mit $\#A = p^2 \cdot q^2$ ein zwei-elementiges Erzeugendensystem besitzt.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Bahnen und Stabilisatoren; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei X eine Menge, sei G eine Gruppe, es sei eine Gruppenoperation von G auf X gegeben und es seien $x, y \in X$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $G \cdot x = G \cdot y$, so folgt $G_x \cong G_y$.

2. Ist $G_x \cong G_y$, so folgt $G \cdot x = G \cdot y$.

Aufgabe 3 (symmetrische Gruppen in Matrixgruppen; 4 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass S_n zu einer Untergruppe von $\mathrm{GL}_N(K)$ isomorph ist.
Hinweis. Was ist eine günstige Wahl für N ? Wie erhält man mühelos lineare Abbildungen aus Abbildungen?

Aufgabe 4 (Triforce-Münzen; 4 Punkte)**.** Die Zentralbank von Hyrule beschließt, Münzen in Umlauf zu bringen. Die Münzen haben die Form eines gleichseitigen Dreiecks, unterteilt in vier kongruente gleichseitige Dreiecke (Abbildung (a)).

(a) (b) (c) (d)

Um verschiedene Sorten Münzen zu ermöglichen, können aus den vier Dreiecken noch Kreise oder seitenparallele Dreiecke ausgestanzt werden. Wieviele essentiell verschiedene solcher Münzen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Die Münzen in Abbildung (b) und (c) sind essentiell verschieden, aber die Münzen in Abbildung (c) und (d) *nicht*. Modellieren und lösen Sie das Problem mithilfe einer geeigneten Gruppenoperation. Achten Sie auf eine übersichtliche und nachvollziehbare Darstellung der Lösung.

Bonusaufgabe (GAP; 4 (=1+1+1+1) Punkte)**.** Das System GAP und Dokumentation dazu finden Sie unter: https://www.gap-system.org/. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben den GAP-Code und gegebenenfalls die Ausgabe von GAP an.

1. Verwenden Sie das Computeralgebrasystem GAP, um die Menge aller Konjugationsklassen von Elementen in S_8 zu bestimmen.

2. Verwenden Sie das Computeralgebrasystem GAP, um herauszufinden, wieviele Untergruppen die Gruppe S_8 besitzt.

3. Wie kann man mit GAP die Zykelzerlegung eines Elements in einer endlichen symmetrischen Gruppe bestimmen?

4. Wie kann man mit GAP herausfinden, ob eine Teilmenge einer endlichen symmetrischen Gruppe ein Erzeugendensystem dieser Gruppe ist?

Abgabe bis 14. November 2025, 8:25, via Briefkasten/GRIPS