

Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 5 vom 14. November 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Quotienten). Wiederholen Sie die *universelle Eigenschaft von Quotientengruppen*.

Fingerübung B (Permutationen). Berechnen Sie folgende Permutationen in S_5 und geben Sie jeweils eine möglichst einfache Beschreibung des Ergebnisses:

1. $(1\ 2\ 3) \cdot (4\ 5) \cdot (3\ 2\ 1)$
2. $(1\ 2\ 3) \cdot (1\ 4) \cdot (3\ 2\ 1)$
3. $(1\ 3\ 2) \cdot (1\ 3\ 4) \cdot (1\ 2) \cdot (3\ 4)$
4. $(1\ 2) \cdot (2\ 3) \cdot (1\ 2) \cdot (2\ 3)$

Fingerübung C (Zykelzerlegungen). Bestimmen Sie und skizzieren Sie die Zykelzerlegungen der folgenden Permutationen in S_6 . Bestimmen Sie dann die Ordnungen dieser Elemente.

1. $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 1, 6 \mapsto 6$
2. $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 4, 6 \mapsto 6$
3. $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 6, 5 \mapsto 2, 6 \mapsto 4$
4. $1 \mapsto 6, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 1, 5 \mapsto 3, 6 \mapsto 4$

Fingerübung D (Normalreihen). Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass A eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren besitzt.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (semi-direkte Produkte; 2 (= 0 + 1 + 1) Punkte). Wir betrachten die Gruppe $D_\infty := \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2$, wobei $\varphi: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ durch $\varphi([1]) = -\text{id}_\mathbb{Z}$ gegeben ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

0. Wiederholen Sie die Definition des *semi-direkten Produkts*.
1. Welche Ordnung besitzt $(1, [1])$?
2. Geben Sie ein Beispiel für Elemente $g, h \in D_\infty$ mit $\text{ord } g = 2 = \text{ord } h$ und $\text{ord}(g \cdot h) = \infty$ (!) an.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (Diedergruppen; 4 (=0+3+1) Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

0. Wiederholen Sie die Definition der *Diedergruppe* D_n .
1. Zeigen Sie, dass die Kommutatoruntergruppe $[D_n, D_n]$ zyklisch ist.
2. Wieviele Elemente enthält $D_n/[D_n, D_n]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Zykelsalat; 4 (=2+2) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Menge $\{(5\ 1), (7\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6)\}$ ist ein Erzeugendensystem von S_7 .
2. Die Menge $\{(5\ 1\ 2), (7\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5\ 6)\}$ ist ein Erzeugendensystem von S_7 .

Hinweis. Verwenden Sie Ergebnisse und Werkzeuge aus der Vorlesung, um dies knapp und präzise zu lösen. Evtl. kann es helfen, sich zu überlegen, was passiert, wenn man Elemente umbenennt und wie sich das auf den symmetrischen Gruppen widerspiegelt.

Aufgabe 3 (14/15-Puzzle; 4 Punkte). Beim 14/15-Puzzle sind fünfzehn nummerierte Plättchen und eine „Lücke“ auf einem quadratischen Brett verteilt (siehe linke Abbildung). Zeigen Sie mithilfe von symmetrischen Gruppen und des Signums, dass es *nicht* möglich ist, durch Verschieben der Plättchen die Position in der rechten Abbildung zu erreichen.

Hinweis. Modellieren Sie nur die Aspekte, die für die Lösung dieses Problems nötig sind.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Aufgabe 4 (Zykelzerlegung; 4 (=2+2) Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/8 \rightarrow S_7$?
2. Gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/10 \rightarrow S_7$?

Hinweis. Die Gruppe S_7 enthält nicht nur Zykel ...

Bonusaufgabe (Durcheinander; 4 (=1+1+1+1) Punkte). Wir betrachten jeweils ein gewöhnliches Kartenspiel mit 52 Karten.

1. Modellieren Sie das „Abheben“ eines Kartenstapels mithilfe von symmetrischen Gruppen.
2. Zeigen Sie, dass man durch iteriertes Abheben, einen Kartenstapel *nicht* beliebig durchmischen kann. Stellen Sie den Beweis so dar, dass er von einem Mittelstufenschüler verstanden werden könnte.
3. Modellieren Sie „4-strip shuffles“ eines Kartenstapels mithilfe von symmetrischen Gruppen.
4. Kann man durch Iterieren von Abheben und 4-strip shuffles einen Kartenstapel beliebig durchmischen? Begründen Sie Ihre Antwort!