Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann | Blatt 6 vom 21. November 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Gruppentheorie)**.** Geben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 1 (Gruppen).

Fingerübung B (Sylowgruppen)**.** Bestimmen Sie jeweils zu jedem Primteiler der Anzahl der Gruppenelemente eine Sylowgruppe in der angegebenen Gruppe.

1. $\mathbb{Z}/4$
2. $\mathbb{Z}/100$
3. $\mathbb{Z}/21 \times \mathbb{Z}/42$
4. $D_5 \times \mathbb{Z}/2$

Fingerübung C (Sylowzahlen)**.** Sei n jeweils eine der folgenden Zahlen. Gibt es dann eine Gruppe G mit $\#G = n$ mit genau fünf 2-Sylowgruppen?

$$5, \quad 8, \quad 10, \quad 30$$

Fingerübung D (Sylow-Zoo)**.** Lesen Sie Anhang A.4 und machen Sie sich mit den dort gegebenen Beispielen vertraut.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Fixpunkte; 2 (=0+1+1) Punkte)**.** Sei X eine Menge, sei G eine Gruppe und es sei eine Gruppenoperation von G auf X gegeben. Ein Element $x \in X$ ist ein *Fixpunkt* dieser Operation, wenn $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$ gilt.

0. Wiederholen Sie die *Bahnengleichung*.
1. Zeigen Sie: Ist $\#G = 77$ und $\#X = 20$, so besitzt diese Operation mindestens zwei Fixpunkte.
2. Zeigen Sie: Ist $\#G = 77$ und $\#X = 37$, so besitzt diese Operation mindestens einen Fixpunkt.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (Sylowgruppen; 4 (=0+2+2) Punkte)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

0. Wiederholen Sie den Begriff der *Sylowgruppen*. Was sagen die *Sylowsätze* über die Anzahl der Sylowgruppen?
1. Wieviele 3-Sylowgruppen enthält S_4 ?
2. Wieviele 2-Sylowgruppen enthält S_4 ?

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Sylowlogie; 4 (=2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Jede Gruppe G mit $\#G = 2026$ ist auflösbar..
2. Jede Gruppe G mit $\#G = 2040$ ist auflösbar..

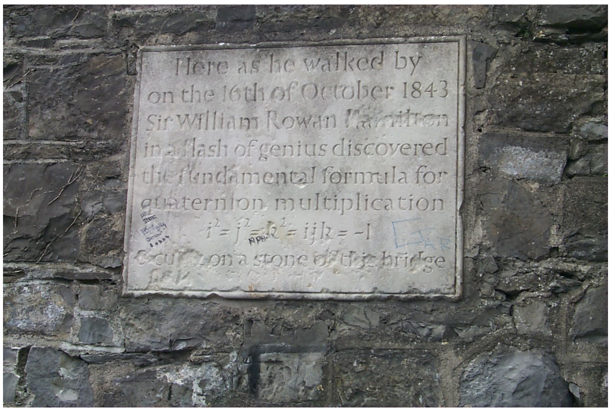
Aufgabe 3 (Primquadrate; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe, für die $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist G abelsch.
2. Folgern Sie: Ist G eine Gruppe und $p \in \mathbb{N}$ prim mit $\#G = p^2$, so ist G abelsch.

Aufgabe 4 (1001 Nacht und die Wilde 13; 4 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe mit $\#G = 1001$. Zeigen Sie, dass es einen Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow \mathbb{Z}/13$ gibt, der surjektiv ist.
Hinweis. Sylow!

Bonusaufgabe (Quaternionen; 4 (=2+1+1) Punkte)**.**

1. Wie sind die Quaternionen definiert?
2. Welche algebraischen Eigenschaften besitzen die Quaternionen?
3. Was hat es mit dem Bild unten auf sich?



Hinweis. Belegen Sie alle Aussagen durch (seriöse, nachvollziehbare) Quellen.