Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 7 vom 28. November 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Polynomringe über Körpern)**.** Wiederholen Sie Eigenschaften von Polynomringen über Körpern, die in der Linearen Algebra behandelt wurden.

Fingerübung B (universelle Eigenschaft des Polynomrings)**.** Wiederholen und beweisen Sie die universelle Eigenschaft des Polynomrings.

Fingerübung C (Ideale)**.** Welche der folgenden Ideale in $\mathbb{Z}$ stimmen überein?

$$(1, 24), \quad (12, 4) \quad (12, 34), \quad (123, 4)$$

Fingerübung D (Restklassenringe)**.** Welche der folgenden Ringe sind isomorph?

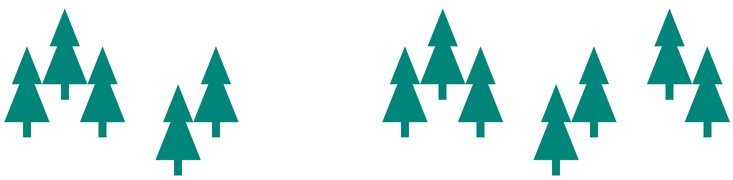
$$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2), \quad \mathbb{Z}/(4), \quad \mathbb{Z}/(5), \quad \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3), \quad \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(2), \quad \mathbb{Z}/(6)$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Permutationen/Ordnung; 2 (=0+1+1) Punkte)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

0. Wiederholen Sie das *Signum* und die *Zykelzerlegung* von Permutationen.
1. Geben Sie ein Beispiel für eine Permutation in S_5 mit Ordnung 6.
2. Gegen Sie ein Beispiel für eine Permutation in A_7 mit Ordnung 6.

Hinweis. Beide Teilaufgaben besitzen sehr kurze Lösungen aus dem Wald!



Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (vierte Potenzen; 4 (=0+1+3) Punkte)**.**

0. Wiederholen Sie die Konstruktion des Rings $\mathbb{Z}/(8)$.
1. Bestimmen Sie alle vierten und alle achten Potenzen in $\mathbb{Z}/(8)$.

   Hinweis. Man muss dafür fast nichts ausrechnen!
2. Folgern Sie, dass die Gleichung

$$x^{2026} - 2 \cdot y^{84} - x^{124} \cdot y^{224} - 88 \cdot x \cdot y^{2025} \cdot z^{2026} = 123456789$$

   keine Lösung $x, y, z \in \mathbb{Z}$ besitzt.

   Hinweis. Seien Sie sparsam beim Rechnen!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Funktionenringe; 4 (=2+2) Punkte). Sei $R := C([0,1],\mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ bezüglich punktweiser Addition/Multiplikation, mit den konstanten Funktionen 0 bzw. 1 als neutralen Elementen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Menge $\{f \in R \mid f(0) = 0 = f(1)\}$ ist ein Ideal in R.
2. Die Abbildung $f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ ist ein Ringhomomorphismus $R \longrightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (endliche Integritätsringe; 4 Punkte). Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsring ein Körper ist.
Hinweis. Ist X eine endliche Menge und ist $f\colon X \longrightarrow X$ injektiv, so ist f bereits bijektiv.

Aufgabe 4 (Charakterisierung von Körpern über Ideale; 4 Punkte). Sei R ein Ring mit $R \not\cong_{\mathsf{Ring}} \{0\}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Ring R ist ein Körper.
2. Der Ring R enthält nur die Ideale $\{0\}$ und R.

Hinweis. Was ist mit Idealen, die nicht-invertierbare Elemente enthalten?

Bonusaufgabe (drittelbar; 4 (=2+2) Punkte). Sei $f \in \mathbb{Z}[T]$.

1. Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ ist $m - n$ ein Teiler von $f(m) - f(n)$.
2. Folgern Sie: Gibt es $k \in \mathbb{Z}$, so dass $f(k)$, $f(k+1)$ und $f(k+2)$ alle durch 3 teilbar sind, so folgt: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $f(n)$ durch 3 teilbar.