Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Lö-hö-hö/F. Ho-Ho-Hofmann Blatt 8 vom 5. Dezember 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: euklidischer Algorithmus). Wiederholen Sie den *euklidischen Algorithmus* aus der Linearen Algebra.

Fingerübung B (ggT). Bestimmen Sie in $\mathbb{F}_2[T]$ den größten gemeinsamen Teiler von $T^7 + T^4 + T^3 + T + 1$ und $T^3 + T + 1$.

Fingerübung C (Primideale, maximale Ideale). Welche der folgenden Ideale sind prim? Welche maximal?

1. (4242) in $\mathbb{Z}$; (4242) in $\mathbb{Q}$
2. $(T^2 + 2)$ in $\mathbb{Q}[T]$; $(T^2 + 2)$ in $\mathbb{R}[T]$
3. $(2, T)$ in $\mathbb{Z}[T]$; $(2, T)$ in $\mathbb{Q}[T]$
4. (X, Y) in $\mathbb{Z}[X, Y]$; (X, Y) in $\mathbb{Q}[X, Y]$

Fingerübung D (Reste). Bestimmen Sie mit dem chinesischen Restsatz alle ganzen Zahlen n mit

$$n \equiv 3 \mod 17 \quad \text{und} \quad n \equiv 13 \mod 71 \quad \text{und} \quad n \in \{1, \dots, 1111\}.$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Sylow 85; 2 (=0+1+1) Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

0. Wiederholen Sie die *Sylowsätze*.
1. Wieviele 17-Sylowgruppe enthält eine Gruppe G mit $\#G = 85$?
2. Ist jede Gruppe G mit $\#G = 85$ auflösbar?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf präzise und verständliche Formulierungen. Der Leser soll lesen, nicht dechiffrieren.

Aufgabe 1 (Adventskalender; 4 (=1+3) Punkte). Über die Adventszeit auf dem Planeten Blorx ist folgendes bekannt:

- Fertigt man einen Adventskalender mit 93er-Reihen, so benötigt man zusätzlich eine Reihe mit 57 Türchen.
- Fertigt man einen Adventskalender mit 112er-Reihen, so benötigt man zusätzlich eine Reihe mit 98 Türchen.
- Die blorxische Adventszeit ist länger als ein Blorxmonat, aber kürzer als ein Blorxjahr.

Ein Blorxjahr hat bekannterweise 8888 Tage, ein Blorxmonat hat 888 Tage.

1. Modellieren Sie diese Situation durch geeignete Restklassenringe.
2. Wie lange dauert die blorxische Adventszeit? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (komplexe Zahlen?!; 4 (=2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{R}[T]/(T^2+1) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}$.
2. Es gilt $\mathbb{R}[T]/(T^3+1) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (Ringe mit p bzw. $p \cdot q$ Elementen; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim und sei R ein Ring mit $\#R = p$. Zeigen Sie, dass der Ring R zu $\mathbb{Z}/(p)$ isomorph ist.
2. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ prim mit $p \neq q$ und sei R ein Ring mit $\#R = p \cdot q$. Zeigen Sie, dass der Ring R zu $\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(q)$ isomorph ist.

Hinweis. Wie sieht die unterliegende additive Gruppe aus? Was liefert das Distributivgesetz? Welche Produkte von Elementen muss man also nur kennen? Was liefert das multiplikative neutrale Element?

Aufgabe 4 (gaußsche Primzahlen; 4 (=2+2) Punkte)**.** Wir betrachten die *Normabbildung*

$$\begin{aligned} N \colon \mathbb{Z}[i] &\longrightarrow \mathbb{N} \\ z &\longmapsto |z|^2 = z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \end{aligned}$$

auf den gaußschen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Bestimmen Sie mithilfe von N die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring bezüglich der euklidischen Gradfunktion N ist.
3. Zeigen Sie: Ist $p \in \mathbb{Z}[i]$ ein Element, für das $N(p)$ prim in $\mathbb{Z}$ ist, so ist p bereits prim in $\mathbb{Z}[i]$.
4. Ist $10 - 29 \cdot i$ prim in $\mathbb{Z}[i]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bo-Ho-Honusaufgabe (Nikolausaufgabe; 4 Punkte)**.**

Commander Blorx passiert den Nikolaus bei einem nur mittelmäßig riskanten Überholmanöver und grüßt ihn gut gelaunt mit „HO-HO-HO“.

Gar nicht amüsiert zetert der Nikolaus: „Nix HO-HO-HO! Erstens hast Du als Amateur ja gar keine Ahnung von der Materie und sicher nur zufällig HO-HO-HO gesagt, statt zum Beispiel HO-HO-HO-HO-HO-HO-HO-HO-HO-HO-HO-HO. Wie der Profi weiß, sind nämlich nur Primpotenzen zulässig.

Zweitens tun immer alle so, als ob es beliebig viele HO gäbe. Stimmt aber nicht. Im diesjährigen Budget sind nur noch 2025^{2025} HO verfügbar!

Drittens ist nur der der wahre Nikolaus, der das letzte HO verbraucht.“

Diese klare Ansage motiviert Commander Blorx selbstverständlich zu völlig sinnlosen Höchstleistungen. Wie kann Blorx dafür sorgen, dass er der wahre Nikolaus ist, wenn er und der (bald ehemalige) Nikolaus jeweils abwechselnd nach den obigen Regeln mit HO kommunizieren und Blorx beginnt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bild: Aura Lö-hö-hö

Abgabe bis 12. Dezember 2025, 8:25, via Briefkasten/GRIPS