

Algebra: Körpererweiterungen?!

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Januar 2026

Hinweis. Galoistheorie ist kein Hexenwerk, sondern kann mit etwas Geduld und Neugierde erlernt werden! Falls Galoistheorie im Moment noch wie im untenstehenden Bild wirkt, können die folgenden Fragen evtl. dabei helfen, die Gedanken und die Prüfungsvorbereitung in Ruhe zu sortieren.



Don't panic!

Den Begriff/Satz ...

- **Körpererweiterung** habe ich
 - gut einigermaßen eher nicht Bahnhof!
 - verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen
 - gut manchmal eher nie niemals!!
 - einsetzen.
- **algebraisches Element einer Körpererweiterung** habe ich
 - gut einigermaßen eher nicht Bahnhof!
 - verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen
 - gut manchmal eher nie niemals!!
 - einsetzen.
- **Minimalpolynom eines algebraischen Elements** habe ich
 - gut einigermaßen eher nicht Bahnhof!
 - verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen
 - gut manchmal eher nie niemals!!
 - berechnen/einsetzen.
- **Grad einer Körpererweiterung** habe ich
 - gut einigermaßen eher nicht Bahnhof!
 - verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen
 - gut manchmal eher nie niemals!!
 - berechnen/einsetzen.
- **Galoisgruppe einer Körpererweiterung** habe ich
 - gut einigermaßen eher nicht Bahnhof!
 - verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen
 - gut manchmal eher nie niemals!!
 - berechnen/einsetzen.

- **Nemesis Konjugationsprinzip** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **algebraische Körpererweiterung** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **transzendenten Körpererweiterung** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **endliche Körpererweiterung** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **Charakteristik eines Körpers** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| berechnen/einsetzen. | | | |
- **Klassifikation der endlichen Körper** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| berechnen/einsetzen. | | | |
- **Zerfällungskörper** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| berechnen/einsetzen. | | | |
- **algebraischer Abschluss** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **normale Körpererweiterung** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |

- **separable Körpererweiterung** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **Galoiserweiterung** habe ich

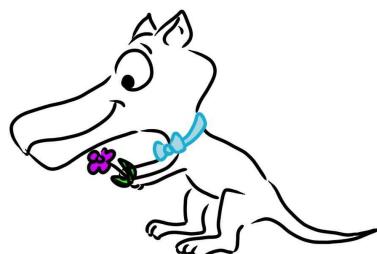
| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **Hauptsatz der Galoistheorie** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |
- **Separabilitätsgrad** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| berechnen/einsetzen. | | | |
- **Satz vom primitiven Element** habe ich

| | | | |
|--|---------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> einigermaßen | <input type="checkbox"/> eher nicht | <input type="checkbox"/> Bahnhof! |
| verstanden und kann ihn in Beispielen/Beweisen | | | |
| <input type="checkbox"/> gut | <input type="checkbox"/> manchmal | <input type="checkbox"/> eher nie | <input type="checkbox"/> niemals!! |
| einsetzen. | | | |

Bei kleinen oder größeren Lücken und Unsicherheiten helfen wie immer die allgemeinen Prinzipien der Erarbeitung: Begriffe und Sätze lernen, Beweisideen verstehen, Beispiele rechnen, Zusammenhänge zwischen Begriffen/Sätzen/Beispielen erforschen. Beginnen Sie mit den einfachen Dingen (wie mit den untenstehenden Aufgaben) und arbeiten Sie sich dann zu den komplizierteren Aspekten durch. Nutzen Sie die Gelegenheit, in den Übungen Fragen zu stellen! Dann wird sich die Galoistheorie hoffentlich von ihrer besten Seite zeigen ...



Aufgaben

Aufgabe 1. Wir betrachten die Zahl $\sqrt{3} \in \mathbb{C}$ und die zugehörige Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$.

1. Wie lautet die Definition von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?
2. Welche Charakteristik hat $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?
3. Ist das Element $\sqrt{3}$ algebraisch über \mathbb{Q} ?
4. Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ algebraisch?
5. Was ist das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über \mathbb{Q} ?
6. Was ist der Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$?
7. Ist $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper eines Polynoms über \mathbb{Q} ?
8. Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ normal?
9. Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ separabel?
10. Was ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]_s$?
11. Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ galoissch?
12. Wie viele Elemente enthält $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q})$?
13. Wie kann man die Elemente von $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q})$ explizit beschreiben?
14. Wieviele Zwischenkörper hat $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$?

Lösung zu Aufgabe 1

1. siehe Definition 3.2.4
2. Als Erweiterungskörper von \mathbb{Q} hat $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ die Charakteristik $\text{char } \mathbb{Q} = 0$.
3. Ja, denn $\sqrt{3}$ ist eine Nullstelle des Polynoms $T^2 - 3 \in \mathbb{Q}[T] \setminus \mathbb{Q}$.
4. Ja, denn $\sqrt{3}$ ist algebraisch über \mathbb{Q} , und damit ist Korollar 3.2.35 anwendbar.
5. Das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über \mathbb{Q} ist $T^2 - 3$, denn $\sqrt{3}$ ist eine Nullstelle dieses Polynoms, das Polynom ist normiert und es ist irreduzibel (Eisenstein zur Primzahl $3 \in \mathbb{Z}$; das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium ist anwendbar, denn ...).
6. Es gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$, denn das Minimalpolynom von $\sqrt{3}$ über \mathbb{Q} hat Grad 2. Somit folgt die Behauptung mit Proposition 3.2.24.
7. Ja, denn: Das normierte Polynom $T^2 - 3$ zerfällt wegen $-\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ in Linearfaktoren:

$$T^2 - 3 = (T - \sqrt{3}) \cdot (T + \sqrt{3}).$$

Wegen $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, ist somit $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von $T^2 - 3$ über \mathbb{Q} .

8. Ja, denn: Wir wissen bereits, dass die Erweiterung algebraisch ist und dass das Minimalpolynom $T^2 - 3$ von $\sqrt{3}$ über \mathbb{Q} über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ in Linearfaktoren zerfällt. Mit Proposition 3.4.5 folgt die Behauptung.
9. Ja, denn: Alle algebraischen Körpererweiterungen von Körpern mit Charakteristik 0 sind separabel (Beispiel 3.4.9).
10. Da die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ separabel ist, ist nach Proposition 3.4.11

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]_s = [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2.$$

11. Ja, da sie normal und separabel ist.
12. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie (anwendbar, da ...) ist

$$\# \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2.$$

Alternativ kann man diese Anzahl auch mit dem Konjugationsprinzip bestimmen.

13. Die Nullstellen des Minimalpolynoms von $\sqrt{3}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sind $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$. Daher enthält $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q})$ genau zwei Elemente und diese sind durch

$$\sqrt{3} \mapsto \sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$$

eindeutig bestimmt. Das erste Element stimmt dabei mit $\text{id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}$ überein (aufgrund der Eindeutigkeit).

14. Wir verwenden den Hauptsatz der Galoistheorie (anwendbar, da ...). Sei $G := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q})$. Wegen $\#G = 2$ ist $G \cong_{\text{Group}} \mathbb{Z}/2$. Somit besitzt G genau zwei Untergruppen: die triviale Untergruppe und G . Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie besitzt $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ somit genau zwei Zwischenkörper:

- Den Zwischen-/Fixkörper zur trivialen Untergruppe: $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
- Den Zwischen-/Fixkörper zur Untergruppe G : \mathbb{Q} .

Aufgabe 2. Beantworten Sie die entsprechenden Fragen für $\mathbb{Q}(i) \mid \mathbb{Q}$.

Hinweis. Das geht wirklich ganz überraschungsfrei analog zu Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Beantworten Sie die entsprechenden Fragen für $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \mid \mathbb{Q}$.

Hinweis. Die meisten Antworten finden Sie in der Vorlesung/im Skript. Die Antworten sind anders als in Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Beantworten Sie die entsprechenden Fragen für $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) \mid \mathbb{Q}$.

Hinweis. Das ist das in der Vorlesung behandelte Beispiel 3.2.41.

Aufgabe 5. Beantworten Sie die entsprechenden Fragen für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_2[T]/(T^2 + T + 1) \mid \mathbb{F}_2$.

Hinweis. Die Antworten sind sehr analog zu Aufgabe 1. Die Argumente müssen aber wegen der offensichtlichen Unterschiede (Charakteristik?!?) angepasst werden.

Keine Abgabe!