Klausur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann 9. Februar 2026

Matrikelnummer: | | | | | | | |

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	12	8	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition für den Begriff des *Index* einer Untergruppe.
2. Zeigen Sie, dass S_5 eine Untergruppe vom Index 24 enthält.
3. Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $A_5 \longrightarrow \mathbb{Z}/3$?
   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist für jede auflösbare Gruppe G auch $G \times G$ auflösbar?
   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Geben Sie die Definition dafür, dass ein Ideal eines Ringes *prim* ist.
2. Zeigen Sie: Ist R ein Ring und $p \subset R$ ein Primideal, so ist der Ring R/p *nicht* isomorph zum Ring $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
3. Ist das Ideal $(2 \cdot X + 2)$ in $\mathbb{Q}[X]$ prim?

   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist das Polynom $T^3 + T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (1 + 3 + 3 + 3 = 10 Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition dafür, dass eine algebraische Körpererweiterung *normal* ist.

2. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ algebraisch und normal ist.

3. Ist jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ normal?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Gibt es einen Körper K mit $K^\times \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/17$?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 ($3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den *kleinen Satz von Fermat*.
2. Beweisen Sie den kleinen Satz von Fermat.
3. Bestimmen Sie die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung von 7^{33}.

Aufgabe 5 ($3+3+3+3 = 12$ Punkte)**.** Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$(\alpha - 1)^4 = 3$$

1. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \alpha) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 5$ ist.
3. Zeigen Sie, dass $\#\,\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}) = 2$ ist.
4. Ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von $(T-1)^4 - 3$ über $\mathbb{Q}$?
   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 ($2 + 3 + 3 = 8$ Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung, sei $G := \mathrm{Gal}(L, K)$ und es gelte $\#G = 75$.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylowgruppen von G.

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Zeigen Sie, dass es genau einen Zwischenkörper M von $L \mid K$ gibt, der $[M : K] = 3$ erfüllt.

3. Zeigen Sie, dass es ein Element in L gibt, dessen Minimalpolynom über K den Grad 15 besitzt.