Wiederholungsklausur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann 19. März 2026

Matrikelnummer: | | | | | | | |

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	12	8	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 $(1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte**).**

1. Geben Sie die Definition für den Begriff des *Zentrums* einer Gruppe.
2. Sei G eine Gruppe. Ist das Zentrum von G ein Normalteiler von G ? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $S_3 \times S_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/5$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ *nicht* auflösbar ist.

Lösung:

1. Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum von* G ist
$$Z(G) := \left\{ g \in G \;\middle|\; \forall_{h \in G} \quad g \cdot h = h \cdot g \right\} \subset G.$$
2. *Behauptung.* Ja, das Zentrum ist ein Normalteiler von G.

   Beweis. Sei $z \in Z(G)$ und $g \in G$. Dann ist $g \cdot z \cdot g^{-1} \in Z(G)$, denn:
$$g \cdot z \cdot g^{-1} = z \cdot g \cdot g^{-1} = z \cdot e = z \in Z(G)$$ □
3. *Behauptung.* Nein, es gibt keinen Gruppenhomomorphismus $S_3 \times S_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/5$, der surjektiv ist.

   Beweis. Angenommen, es gäbe einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon S_3 \times S_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/5$.

   Wir betrachten $H := \ker \varphi$. Dann induziert φ nach dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $(S_3 \times S_4)/H \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/5$. Insbesondere ist
$$5 = \#\mathbb{Z}/5 = \frac{\#(S_3 \times S_4)}{\#H} = \frac{3! \cdot 4!}{\#H}.$$
   Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\#H \in \mathbb{N}_{>0}$ ist und 5 kein Teiler von $3! \cdot 4!$ ist.

   [Hinweis. Es genügt *nicht*, zu zeigen, dass $S_3 \times S_4$ kein Element der Ordnung 5 enthält.] □
4. Die Gruppe $\mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ enthält eine Gruppe, die zu S_5 isomorph ist (gegeben durch die Permutationsmatrizen). Da S_5 *nicht* auflösbar ist, folgt mit den Vererbungseigenschaften auflösbarer Gruppen, dass auch $\mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ *nicht* auflösbar ist.

Aufgabe 2 $(1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte**).**

1. Geben Sie die Definition dafür, dass ein Ideal eines Ringes *prim* ist.
2. Zeigen Sie: Ist R ein Ring und $p \subset R$ ein Primideal, so ist der Ring R/p *nicht* isomorph zum Ring $\mathbb{Z}/(2025)$.
3. Ist das Ideal $(X + 1)$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ prim?

   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist das Polynom $2 \cdot T^5 + 4 \cdot T^3 + 4 \in \mathbb{Q}[T]$ in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei R ein Ring. Ein Ideal $p \subset R$ in R ist *prim*, wenn $p \neq R$ ist und

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y \in p \Longrightarrow (x \in p \vee y \in p).$$

2. Sei R ein Ring und sei $p \subset R$ ein Primideal. Dann ist R/p ein Integritätsring.

   Der Ring $\mathbb{Z}/(2025)$ ist jedoch *kein* Integritätsring, da etwa $[5]$ ein nichttrivialer Nullteiler ist: In $\mathbb{Z}/(2025)$ gilt $[5] \neq [0]$ und $[405] \neq [0]$, aber

$$[5] \cdot [405] = [5 \cdot 405] = [2025] = [0].$$

3. *Behauptung.* Ja, das Ideal $(X + 1)$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ ist prim.

   Beweis. Mit der universellen Eigenschaft von Polynomringen und Restklassenringen folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[X, Y]/(X + 1) &\longrightarrow \mathbb{Q}[Y] \\ [\mathbb{Q} \ni x] &\longmapsto x \\ [X] &\longmapsto -1 \\ [Y] &\longmapsto Y \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist. Dieser ist sogar ein Isomorphismus mit Inversem

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[Y] &\longrightarrow \mathbb{Q}[X,Y]/(X+1) \\ \mathbb{Q} \ni x &\longmapsto [x] \\ Y &\longmapsto [Y]. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{Q}[X,Y]/(X+1) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Q}[Y]$ ein Integritätsring. Somit ist das Ideal $(X+1)$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ prim.

[Alternativ könnte man argumentieren, dass $X+1$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ irreduzibel und $\mathbb{Q}[X,Y]$ nach dem Satz von Gauß faktoriell ist.] □

4. *Behauptung.* Ja, das Polynom $2 \cdot T^6 + 4 \cdot T^3 + 4$ in $\mathbb{Q}[T]$ ist irreduzibel.

Beweis. Es gilt

$$2 \cdot T^6 + 4 \cdot T^3 + 4 = 2 \cdot (T^6 + 2 \cdot T^3 + 2).$$

Da 2 eine Einheit in $\mathbb{Q}[T]$ ist, genügt es somit zu zeigen, dass $f := T^6 + 2 \cdot T^3 + 2$ in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist.

Wir wenden das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium auf den Grundring $\mathbb{Z}$ und die Primzahl $2 \in \mathbb{Z}$ an. Dies ist möglich, denn:

- Der Ring $\mathbb{Z}$ ist faktoriell, 2 ist prim in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z})$.
- Das Polynom f liegt in $\mathbb{Z}[T]$ und ist als normiertes Polynom primitiv.
- Es gilt für die Koeffizienten von f:

$$2 \nmid 1, \quad 2 \mid 2, \quad 2 \mid 2, \quad 2^2 \nmid 2.$$

Also ist f nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium in $\mathbb{Z}[T]$ und in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel. □

Aufgabe 3 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Geben Sie die Definition für den *Grad* einer Körpererweiterung.
2. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \mid \mathbb{Q}$ endlich ist.
3. Ist jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ normal?
   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es einen Körper K mit $K^\times \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/8$?
   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung. Der *Grad von* $L \mid K$ ist definiert als
$$[L : K] := \dim_K L \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}.$$

2. Nach der Multiplikativität des Grades ist
$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}].$$
   Seien $\alpha := \sqrt{5}$, $\beta := \sqrt{3} \in \mathbb{C}$.
   Wegen $\alpha^2 - 5 = 0$ ist α algebraisch über $\mathbb{Q}$. Also ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] < \infty$.
   Wegen $\beta^2 - 3 = 0$ ist β algebraisch über $\mathbb{Q}(\alpha)$. Also ist $[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] < \infty$.
   Insgesamt folgt, dass $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$ endlich ist.

3. *Behauptung.* Nein, nicht jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist normal.

   Beweis. Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \mid \mathbb{Q}$ ist endlich, da sie von dem über $\mathbb{Q}$ algebraischen Element $\sqrt[3]{2}$ erzeugt wird.
   Diese Körpererweiterung ist jedoch *nicht* normal, denn: Es ist $\mu := T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$ das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ (z.B. nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium).
   Es ist $\zeta_3 \cdot \sqrt[3]{2} \in \mathbb{C}$ eine nicht-reelle Nullstelle von μ. Wegen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{R}$ liegt diese Nullstelle *nicht* in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Somit zerfällt μ über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *nicht* in Linearfaktoren. Daher ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \mid \mathbb{Q}$ *nicht* normal. □

4. *Behauptung.* Ja, es gibt einen Körper K mit $K^\times \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/8$.

Beweis. Nach der Klassifikation der endlichen Körper gibt es einen Körper K mit $\#K = 3^2$ (da $3 \in \mathbb{N}$ prim ist).

Dann ist $\#(K^\times) = \#K - 1 = 3^2 - 1 = 8$.

Da endliche Untergruppen der Einheitengruppe eines Körpers zyklisch sind, ist die endliche Gruppe $K^\times$ zyklisch. Insbesondere ist

$$K^\times \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/\#K^\times = \mathbb{Z}/8.$$ □

Aufgabe 4 ($5 + 1 + 1 + 3 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie die *Sylowsätze*.
2. Nennen Sie ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis der Sylowsätze.
3. Nennen Sie eine Anwendung der Sylowsätze.
4. Bestimmen Sie alle 2-Sylowgruppen von S_3.

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei G eine endliche Gruppe und sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Dann gilt:
   (a) Es gibt eine p-Sylowgruppe in G.
   (b) Jede p-Untergruppe von G ist in einer p-Sylowgruppe von G enthalten.
   (c) Je zwei p-Sylowgruppen von G sind konjugiert (insbesondere isomorph) zueinander.
   (d) Sei s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Dann gilt
   $$s_p \mid \#G \quad \text{und} \quad s_p \equiv 1 \mod p.$$
2. Der Beweis der Sylowsätze beruht auf der Verwendung geeigneter Gruppenoperationen.

   [Es gibt hier viele mögliche korrekte Antworten.]
3. Aus den Sylowsätzen ergibt sich zum Beispiel der Satz von Cauchy.

   [Es gibt hier viele mögliche korrekte Antworten.]
4. Es gilt $\#S_3 = 3! = 3 \cdot 2$.

   Die 2-Sylowgruppen von S_3 sind also genau die zwei-elementigen Untergruppen von S_3.

   Mit der Zykelzerlegung folgt, dass dies genau die Untergruppen
   $$\langle (1\ 2) \rangle_{S_3}, \quad \langle (1\ 3) \rangle_{S_3}, \quad \langle (2\ 3) \rangle_{S_3}$$
   sind.

Aufgabe 5 $(3+3+3+3=12$ Punkte**).** Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$\alpha^4 - 6 \cdot \alpha^2 + 9 = 0$$

1. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 3$ ist.
3. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha) \mid \mathbb{Q}$ *nicht* normal ist.
4. Zeigen Sie, dass $\#\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, i), \mathbb{Q}) = 4$ ist.

Lösung:

1. Sei $\mu := T^2 - 3 \in \mathbb{Q}[T]$. Dann ist μ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$, denn:
   - Es ist $\mu(\alpha) = 0$, denn
     $$\mu(\alpha) \cdot \mu(\alpha) = (\mu \cdot \mu)(\alpha) = (T^4 - 6 \cdot T^2 + 9)(\alpha) = \alpha^4 - 6 \cdot \alpha^2 + 9 = 0.$$
   - Das Polynom μ liegt in $\mathbb{Q}[T]$ und ist normiert.
   - Das Polynom μ ist in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel (nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium bezüglich der Primzahl 3 in $\mathbb{Z}$).

   Also ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg \mu = 2$.
2. Es gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = 3$ (das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{5}$ über $\mathbb{Q}$ ist nach Eisenstein $T^3 - 5$).

   Also ist $\operatorname{ggT}([\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}], [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]) = \operatorname{ggT}(3, 2) = 1$. Mit der Gradformel für Komposita ergibt sich somit
   $$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \cdot \mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3 \cdot 2.$$
   Mit der Multiplikativität des Grades erhalten wir daraus
   $$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha) : \mathbb{Q}(\alpha)] = \frac{[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

3. Sei $\beta := \sqrt[3]{5} \in \mathbb{C}$. Dann ist β reell, aber das Minimalpolynom $T^3 - 5$ von β über $\mathbb{Q}$ besitzt auch die nicht-reelle Nullstelle $\beta' := \zeta_3 \cdot \beta \in \mathbb{C}$.

   Nach dem ersten Teil ist $T^2 - 3$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Also ist $\alpha \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Daher ist auch α reell.

   Somit folgt $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha) \subset \mathbb{R}$ und insbesondere $\beta' \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha)$.

   Also ist die Körpererweiteurng $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \alpha) \mid \mathbb{Q}$ *nicht* normal.

4. Es handelt sich bei $\mathbb{Q}(\alpha, i) \mid \mathbb{Q}$ um eine Galoiserweiterung, denn:

   - Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha, i) \mid \mathbb{Q}$ ist normal, da sie von $\{\alpha, i\}$ erzeugt wird und die Minimalpolynome von α bzw. i über $\mathbb{Q}$ bereits in $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ in Linearfaktoren zerfallen:

     $$T^2 - 3 = (T + \alpha) \cdot (T - \alpha), \qquad T^2 + 1 = (T + i) \cdot (T - i).$$

   - Außerdem ist $\mathbb{Q}(\alpha, i) \mid \mathbb{Q}$ separabel, da es sich um eine algebraische Körpererweiterung in Charakteristik 0 handelt.

   Da $\mathbb{Q}(\alpha, i) \mid \mathbb{Q}$ eine (endliche) Galoiserweiterung ist, folgt mit der Multiplikativität des Grades

   $$\#\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, i), \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha)(i) : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}].$$

   Wegen $i^2 - 1 = 0$ und $i \notin \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ ist $[\mathbb{Q}(\alpha)(i) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$.

   Insgesamt ergibt sich somit

   $$\#\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha, i), \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha)(i) : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4.$$

Aufgabe 6 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung, sei $G := \mathrm{Gal}(L, K)$ und es gelte $\#G = 42$.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G.

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler N mit den folgenden Eigenschaften besitzt: Es ist $\#N > 1$ und G/N enthält ein Element der Ordnung 2.

3. Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $[M : K] = 3$ gibt.

Lösung:

1. Sei s_7 die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G. Nach den Sylowsätzen gilt

   $$s_7 \equiv 1 \mod 7 \quad \text{und} \quad s_7 \mid 42,$$

   und damit $s_7 \in \{1, 8, 15, 22, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\} = \{1\}$. Also $s_7 = 1$.

   [Behauptungen wie „Es gibt eine 7-Sylowgruppe in G.“ o.ä. geben den Sachverhalt nicht vollständig wieder. Korrekt wäre in diesem Fall „Es gibt genau eine 7-Sylowgruppe in G.“ Dies ist ein fundamentaler Unterschied.]

2. Wegen $s_7 = 1$ ist die eindeutig bestimmte 7-Sylowgruppe N von G ein Normalteiler. Wegen $\#G = 42 = 7 \cdot 2 \cdot 3$ ist $\#N = 7$.

   Dann gilt

   $$\#(G/N) = \frac{\#G}{\#N} = \frac{42}{7} = 2 \cdot 3.$$

   Da 2 prim ist, enthält die Gruppe G/N nach dem Satz von Cauchy ein Element der Ordnung 2.

3. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie genügt es, eine Untergruppe $H \subset G$ mit $[G : H] = 3$ zu finden (dann ist $M := L^H$ ein Zwischenkörper von $L \mid K$ mit $[M : K] = [G : H] = 3$).

   Sei $\pi \colon G \longrightarrow G/N$ die kanonische Projektion, sei $g \in G/N$ ein Element der Ordnung 2 (ein solches existiert nach dem zweiten Teil) und sei

   $$H := \pi^{-1}\big(\langle g \rangle_{G/N}\big).$$

Dann ist H eine Untegruppe von G und die wohldefinierten (!), zueinander inversen, Bijektionen

$$\begin{aligned} G/H &\longrightarrow (G/N)/\langle g\rangle_{G/N} \\ g\cdot H &\longmapsto (g\cdot N)\cdot\langle g\rangle_{G/N} \\ (G/N)/\langle g\rangle_{G/N} &\longrightarrow G/H \\ (g\cdot N)\cdot\langle g\rangle_{G/N} &\longmapsto g\cdot H \end{aligned}$$

zeigen, dass

$$[G:H] = \big[(G/N):\langle g\rangle_{G/N}\big] = \frac{\#(G/N)}{\#\langle g\rangle_{G/N}} = \frac{2\cdot 3}{2} = 3.$$