Probeklausur Algebra

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Januar 2026

Matrikelnummer: | | | | | | | |

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	12	8	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($1+3+3+3=10$ Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition für den Begriff des *Normalteilers*.
2. Zeigen Sie: Ist N ein Normalteiler in einer Gruppe G, so ist $N \times N$ ein Normalteiler in $G \times G$.
3. Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $D_5 \times D_{55} \longrightarrow \mathbb{Z}/3$?

   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist die Gruppe $S_3 \times S_7$ auflösbar?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $N \subset G$ ist ein *Normalteiler in* G, wenn:
$$\forall_{n\in N} \quad \forall_{g\in G} \quad g\cdot n\cdot g^{-1} \in N$$
2. Es ist $N \times N$ eine Untergruppe von $G \times G$, da die Menge $N \times N$ aufgrund der komponentenweisen Verknüpfung auf $G \times G$ das neutrale Element (e, e) von $G \times G$ enthält und unter Verknüpfung und Inversen abgeschlossen ist.

   Für alle $n = (n_1, n_2) \in N$ und alle $g = (g_1, g_2) \in G \times G$ gilt
$$g \cdot n \cdot g^{-1} = (g_1, g_2) \cdot (n_1, n_2) \cdot (g_1, g_2)^{-1} = (g_1 \cdot n_1 \cdot g_1^{-1}, g_2 \cdot n_2 \cdot g_2^{-1}).$$
   Da N ein Normalteiler in G ist, sind beide Komponenten in N enthalten. Also ist $g \cdot n \cdot g^{-1} \in N \times N$.
3. *Behauptung.* Nein, es gibt *keinen* surjektiven Gruppenhomomorphismus $D_5 \times D_{55} \longrightarrow \mathbb{Z}/3$.

   Beweis. Angenommen, es gäbe einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon D_5 \times D_{55} \longrightarrow \mathbb{Z}/3$. Wir betrachten $H := \ker\varphi$. Dann induziert φ nach dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $(D_5 \times D_{55})/H \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/3$. Insbesondere ist
$$3 = \#\mathbb{Z}/3 = \frac{\#(D_5 \times D_{55})}{\#H} = \frac{2\cdot 5\cdot 2\cdot 55}{\#H}.$$
   Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\#H \in \mathbb{N}_{>0}$ ist und 3 kein Teiler von $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 55 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11$ ist.

   [Hinweis. Es genügt *nicht*, zu zeigen, dass $D_5 \times D_{55}$ kein Element der Ordnung 3 enthält.] □

4. *Behauptung.* Nein, die Gruppe $S_3 \times S_7$ ist *nicht* auflösbar.

   Beweis. Da Untergruppen von auflösbaren Gruppen auflösbar sind, genügt es, eine Untergruppe von S_7 anzugeben, die nicht auflösbar ist. Wegen $7 \geq 5$ ist S_7 nicht auflösbar; also ist auch die Untergruppe $\{\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}\} \times S_7 \cong_{\mathsf{Group}} S_7$ von $S_3 \times S_7$ nicht auflösbar. □

Aufgabe 2 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition dafür, dass ein Ideal eines Ringes *maximal* ist.
2. Zeigen Sie: Ist R ein Ring und $m \subset R$ ein maximales Ideal, so ist der Ring R/m *nicht* isomorph zum Ring $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
3. Ist das Ideal $(X + 1)$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ maximal?

   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist das Polynom $T^8 + 9 \cdot T^4 + 42 \in \mathbb{Q}[T]$ in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei R ein Ring. Ein Ideal $m \subset R$ in R ist *maximal*, wenn $m \neq R$ und für alle Ideale $a \subset R$ in R gilt: Ist $m \subset a$, so folgt bereits $a = m$ oder $a = R$.
2. Sei R ein Ring und sei $m \subset R$ ein maximales Ideal. Dann ist R/m ein Körper.

   Der Ring $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist jedoch *kein* Körper, da etwa $(1, 0)$ kein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ besitzt.

   [Alternativ könnte man hier statt direkt mit den fehlenden Inversen z.B. auch darüber argumentieren, dass $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nicht nullteilerfrei ist.]

   Also ist der Ring R/m *nicht* isomorph zu $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
3. *Behauptung.* Nein, das Ideal $(X + 1)$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$ ist *nicht* maximal.

   Beweis. Mit der universellen Eigenschaft von Polynomringen und Restklassenringen folgt, dass

   $$\begin{aligned} \mathbb{Q}[X, Y]/(X + 1) &\longrightarrow \mathbb{Q}[Y] \\ [\mathbb{Q} \ni x] &\longmapsto x \\ [X] &\longmapsto -1 \\ [Y] &\longmapsto Y \end{aligned}$$

   ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist. Dieser ist sogar ein Isomorphismus mit Inversem

   $$\begin{aligned} \mathbb{Q}[Y] &\longrightarrow \mathbb{Q}[X, Y]/(X + 1) \\ \mathbb{Q} \ni x &\longmapsto [x] \\ Y &\longmapsto [Y]. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{Q}[X,Y]/(X+1) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Q}[Y]$ *kein* Körper. Somit ist das Ideal $(X+1)$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ *nicht* maximal.

[Man könnte alternativ auch nachweisen, dass $(X+1, Y)$ ein Ideal ist, das echt zwischen $(X+1)$ und $\mathbb{Q}[X,Y]$ liegt.

Es genügt jedoch *nicht*, zu zeigen, dass $(X+1)$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$ irreduzibel ist.] □

4. *Behauptung.* Ja, das Polynom $f := T^8 + 9 \cdot T^4 + 42 \in \mathbb{Q}[T]$ in $\mathbb{Q}[T]$ ist irreduzibel.

   Beweis. Wir wenden das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium auf den Grundring $\mathbb{Z}$ und die Primzahl $3 \in \mathbb{Z}$ an. Dies ist möglich, denn:

   - Der Ring $\mathbb{Z}$ ist faktoriell, 3 ist prim in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z})$.
   - Das Polynom f liegt in $\mathbb{Z}[T]$ und ist als normiertes Polynom primitiv.
   - Es gilt für die Koeffizienten von f:

   $$3 \nmid 1, \quad 3 \mid 9, \quad 3 \mid 42, \quad 3^2 \nmid 42.$$

   Also ist f nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium in $\mathbb{Z}[T]$ und in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel. □

Aufgabe 3 (1 + 3 + 3 + 3 = 10 Punkte).

1. Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Geben Sie die Definition dafür, dass α *algebraisch über* K ist.
2. Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.
3. Ist jede algebraische Körpererweiterung endlich?

   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es einen Körper K mit $K^\times \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Das Element α ist *algebraisch über* K, wenn es ein $f \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $f(\alpha) = 0$ gibt.
2. Sei $\alpha := \sqrt{1+\sqrt{3}}$. Wir betrachten das Polynom $f := T^4 - 2 \cdot T^2 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$. Dann ist f nicht das Nullpolynom und es gilt

   $$f(\alpha) = \alpha^4 - 2 \cdot \alpha^2 - 2 = (\alpha^2 - 1)^2 - 3 = (1 + \sqrt{3} - 1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0.$$

   Also ist α algebraisch über $\mathbb{Q}$.

   [Man findet das Polynom f, indem man zunächst α^2 und dann $(\alpha^2 - 1)^2$ betrachtet, um die Wurzeln zu eliminieren.]
3. *Behauptung.* Nein, im allgemeinen sind algebraische Körpererweiterungen *nicht* endlich.

   Beweis. Sei $K := \{x \in \mathbb{C} \mid x \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\}$. Dann ist K ein Körper mit $\mathbb{Q} \subset K$. Nach Konstruktion ist die Körpererweiterung $K \mid \mathbb{Q}$ algebraisch.
   Diese Körpererweiterung $K \mid \mathbb{Q}$ ist jedoch *nicht* endlich (s. Vorlesung; da $\sqrt[n]{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ in K liegt und $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = n$] gilt). □
4. *Behauptung.* Nein, es gibt *keinen* Körper K mit $K^\times \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$.

Beweis. *Angenommen*, es gäbe einen solchen Körper K. Jede endliche Untergruppe von $K^\times$ ist zyklisch. Insbesondere wäre $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$ isomorph zu einer zyklischen Gruppe, und damit selbst zyklisch.

Die Gruppe $G := \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$ ist jedoch *nicht* zyklisch, da $\#G = 16$ ist, aber aufgrund der komponentenweisen Verknüpfung für alle Elemente $g \in G$ gilt: $\operatorname{ord} g \mid 4$. Insbesondere enthält G *kein* Element der Ordnung $\#G = 16$.

[Alternativ kann man hier auch mit der Klassifikation der endlichen bzw. endlich erzeugten abelschen Gruppen argumentieren.]

Dieser Widerspruch zeigt, dass es keinen solchen Körper gibt. $\square$

Aufgabe 4 (6 + 1 + 3 = 10 Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den *Hauptsatz der Galoistheorie.*
2. Nennen Sie eine Anwendung des Hauptsatzes der Galoistheorie.
3. Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{C}$. Ist $K \mid \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung.
   (a) Dann sind
   $$\begin{aligned} \mathsf{Subext}(L,K) &\longrightarrow \mathsf{Subroup}\,\mathrm{Gal}(L,K) \\ M &\longmapsto \mathrm{Gal}(L,M) \\ \mathsf{Subroup}\,\mathrm{Gal}(L,K) &\longrightarrow \mathsf{Subext}(L,K) \\ H &\longmapsto L^H \end{aligned}$$
   zueinander inverse Bijektionen. Dabei bezeichnet $\mathsf{Subroup}\,\mathrm{Gal}(L,K)$ die Menge aller Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L,K)$ und $\mathsf{Subext}(L,K)$ die Menge aller Zwischenkörper von $L \mid K$.
   (b) Sei M ein Zwischenkörper von $L \mid K$. Dann ist die Körpererweiterung $M \mid K$ genau dann normal, wenn $\mathrm{Gal}(L,M)$ ein Normalteiler in $\mathrm{Gal}(L,K)$ ist. In diesem Fall ist
   $$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(L,K)/\,\mathrm{Gal}(L,M) &\longrightarrow \mathrm{Gal}(M,K) \\ [\sigma] &\longmapsto \sigma|_M \end{aligned}$$
   ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus.
2. Die (Nicht-)Konstruierbarkeit mit Zirkel und Linel.

   [Alternativ: Die (Nicht-)Auflösbarkeit gewisser polynomialer Gleichungen durch Radikale.]
3. *Behauptung.* Nein, $K \mid \mathbb{Q}$ ist *keine* Galoiserweiterung.

   Beweis. Die Körpererweiterung $K \mid \mathbb{Q}$ ist *nicht* normal, denn: Das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{2}$ über $\mathbb{Q}$ ist $\mu := T^4 - 4$. Es gilt
   $$\{x \in \mathbb{C} \mid \mu(x) = 0\} = \{\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i \cdot \sqrt[4]{2}, -i \cdot \sqrt[4]{2}\}.$$
   Da $\sqrt[4]{2}$ reell ist, gilt $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{R}$. Insbesondere ist $i \cdot \sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, und damit zerfällt μ über K *nicht* in Linearfaktoren. □

Aufgabe 5 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)**.** Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)^3 = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $\sqrt[7]{2}$ *nicht* in $\mathbb{Q}(\alpha)$ liegt.
3. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ normal ist.
4. Bestimmen Sie die Anzahl der Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt[7]{2}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei $f := T^4 + T^3 + T^2 + T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$. Dann ist f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$, denn:

   Nach Definition ist f normiert. Aufgrund der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{C}$ ist $f(\alpha) = 0$. Außerdem ist f in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel (s. Vorlesung; da $4 + 1 = 5$ prim ist). Also ist f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

   Somit folgt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg f = 4$.

2. Sei $\beta := \sqrt[7]{2}$. Dann ist

   $$[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 7,$$

   da $T^7 - 2$ das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$ ist.

   Angenommen, β läge in $\mathbb{Q}(\alpha)$. Dann wäre $\mathbb{Q}(\beta)$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$. Mit der Mulitplikativität des Grades folgt dann

   $$4 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\beta)] \cdot [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\beta)] \cdot 7,$$

   im Widerspruch zu $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\beta)] \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Also ist $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$.

3. Wegen

   $$(T - 1) \cdot f = T^5 - 1$$

   ist die Nullstellenmenge von f in $\mathbb{C}$ genau $X := \{\zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4\}$ und $\alpha \in X$.

   Jede dieser Nullstellen ist eine primitive fünfte Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und somit als Potenz jeder anderer dieser Nullstellen darstellbar. Insbesondere liegt jede dieser Nullstellen in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   Da α über $\mathbb{Q}$ algebraisch ist (als Nullstelle von f), ist $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ somit normal.

4. Nach dem Konjugationsprinzip gibt es genau $\#X = 4$ Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$.

   Es ist $T^7 - 2$ das Minimalpolynom von $\beta = \sqrt{7} - 2$ über $\mathbb{Q}(\alpha)$, denn: Es gilt (nach der Rechnung in Teil 2 bzw. 1)

$$\operatorname{ggT}\big([\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}], [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]\big) = \operatorname{ggT}(7, 4) = 1.$$

   Somit folgt für das Minimalpolynom g von β über $\mathbb{Q}(\alpha)$, dass

$$\begin{aligned}\deg g = [\mathbb{Q}(\alpha)(\beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] &= \frac{[\mathbb{Q}(\alpha)(\beta) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} = \frac{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} \\ &= [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 7.\end{aligned}$$

   Da g außerdem ein (normierter) Teiler von $T^7 - 2$ ist, folgt $g = T^7 - 2$.

   Da das Minimalpolynom $T^7 - 2$ von β über $\mathbb{Q}(\alpha)$ genau sieben verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt, gibt es nach dem Konjugationsprinzip zu jedem Körperhomomorphismus $\sigma \colon \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$ genau sieben Fortsetzungen zu Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha)(\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$.

   Insgesamt gibt es also genau $4 \cdot 7 = 28$ Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{C}$.

Aufgabe 6 ($2+3+3=8$ Punkte)**.** Sei $L \mid K$ eine endliche Galoiserweiterung, sei $G := \operatorname{Gal}(L, K)$ und es gelte $\#G = 44$.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der 11-Sylowgruppen von G.

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Zeigen Sie, dass es einen Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ gibt, der surjektiv ist.

3. Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit $[M : K] = 2$ gibt.

Lösung:

1. Sei s_{11} die Anzahl der Sylowgruppen von G. Nach den Sylowsätzen gilt

   $$s_{11} \equiv 1 \mod 11 \quad \text{und} \quad s_{11} \mid 44,$$

   und damit

   $$s_{11} \in \{1, 12, 23, 34, 45, \dots\} \cap \{1, 2, 4, 11, 22, 44\} = \{1\}.$$

   Also ist $s_{11} = 1$.

2. Nach den Sylowsätzen besitzt G eine 11-Sylowgruppe S. Für diese gilt $\#S = 11$, da $\#G = 2^2 \cdot 11$; außerdem ist S ein Normalteiler in G, da $s_{11} = 1$ ist.

   Sei $\pi\colon G \longrightarrow G/S$ die kanonische Projektion. Dann ist π ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und $H := G/S$ erfüllt

   $$\#H = \frac{\#G}{\#S} = \frac{2^2 \cdot 11}{11} = 2^2.$$

   Insbesondere ist (da 2^2 ein Primquadrat ist) die Gruppe H abelsch.

   Nach dem Hauptsatz über endlich bzw. endlich erzeugte abelsche Gruppen ist somit $H \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/4$ oder $H \cong_{\mathsf{Group}} \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. In beiden Fällen gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon H \longrightarrow \mathbb{Z}/2$.

   Die Komposition $\varphi \circ \pi\colon G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ ist somit ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

3. Nach 2. gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\psi\colon G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$. Sei $G' := \ker \psi \subset G$.

   Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie gibt es einen Zwischenkörper M von $L \mid K$ mit (nämlich $L^{G'}$)

$$\begin{aligned}[M : K] &= \frac{[L : K]}{[L : M]} = \frac{\#\operatorname{Gal}(L, K)}{\#\operatorname{Gal}(L, M)} = \frac{\#G}{\#G'} \\ &= \#(G/G') = \#\mathbb{Z}/2 = 2.\end{aligned}$$