Seminar zur Algebraischen Geometrie II

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 7 vom 15. Juni 2009

Thema 1 (Der Grad von Divisorklassen und die Picardgruppe projektiver Räume). Sei L ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gradabbildung $\deg\colon \operatorname{Div}(\mathbb{P}^n_L) \longrightarrow \mathbb{Z}$ einen wohldefinierten Homomorphismus
$$\deg\colon \operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n_L) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
induziert (*Skript*$^{0.6}$*: Beweis von Proposition 7.3/19*); dies vervollständigt den in der Vorlesung gegebenen Beweis von $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n_L) \cong \mathbb{Z}$.

2. Sei D der Cartier-Divisor, der dem Primdivisor $V_+(t_0)$ des projektiven Raums $\mathbb{P}^n_L \cong \operatorname{Proj} L[t_0, \dots, t_n]$ entspricht. Zeigen Sie, dass die invertierbaren Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_L}(D)$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_L}(1)$ isomorph sind (*Skript*$^{0.6}$*: Beweis von Corollary 7.3/21*).

3. Folgern Sie, dass
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n_L) \\ d &\longmapsto \big[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_L}(d)\big] \end{aligned}$$
ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist.

Thema 2 (Affine Schemata mit trivialer Divisorklassengruppe). Sei R ein noetherscher Integritätsring. Zeigen Sie, dass R genau dann faktoriell ist, wenn das Schema $\operatorname{Spec} R$ normal ist und $\operatorname{Cl}(\operatorname{Spec} R) = 0$ gilt.
Hinweis. Sie dürfen (ohne Beweis) verwenden, dass ein noetherscher Integritätsring genau dann faktoriell ist, wenn alle Primideale der Höhe 1 Hauptideale sind. Der Beweis der obigen Aussage über Ringe mit trivialer Divisorklassengruppe findet sich in R. Hartshornes Buch „Algebraic Geometry“ (Proposition II.6.2).

Thema 3 (Divisoren – Beispiele).

1. Bestimmen Sie die Divisorklassengruppe $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}})$.
2. Zeigen Sie, dass die kanonische Projektion $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ einen Isomorphismus $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}) \cong \operatorname{Cl}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$ induziert.
3. Bestimmen Sie die Divisorklassengruppe $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}})$.

Hinweis. Hilfe zu diesen Fragestellungen finden Sie in R. Hartshornes Buch „Algebraic Geometry“ (Proposition II.6.6, Example II.6.6.1).

Besprechung am 24. Juni 2009