Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 10. November 2008

Thema 1 (Induktive und projektive Limiten – elementare Beispiele)**.**

1. Sei X eine Menge und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X. Wie kann man $(U_i)_{i\in I}$ derart als projektives System von Mengen über X auffassen, dass $\bigcap_{i\in I} U_i = \varprojlim_{i\in I} U_i$ in der Kategorie der Mengen über X gilt?

   Formulieren Sie eine universelle Eigenschaft für induktive Limiten von induktiven Systemen, die nicht notwendig gerichtet sind, und zeigen Sie, wie man $(U_i)_{i\in I}$ als (nicht notwendig gerichtetes) induktives System von Mengen über X auffassen kann, dass $\bigcup_{i\in I} U_i$ diese universelle Eigenschaft von $\varinjlim_{i\in I} U_i$ in der Kategorie der Mengen über X mit injektivem Strukturmorphismus nach X erfüllt.

2. Wie kann man $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ derart als induktives System von Gruppen auffassen, dass es einen Isomorphismus $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von Gruppen gibt?

Thema 2 (Die $\mathfrak{a}$-adische Topologie)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Die $\mathfrak{a}$-*adische Topologie* auf R ist die Topologie auf R, die durch die Basis $\{f + \mathfrak{a}^n \mid f \in R,\ n \in \mathbb{N}\}$ gegeben ist.

Eine Folge von Elementen in R ist eine *Cauchyfolge* bzw. *Nullfolge*, falls sie eine Cauchyfolge bzw. Nullfolge bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie ist. Sei C die Menge aller Cauchyfolgen und sei N die Menge aller Nullfolgen bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie.

1. Zeigen Sie, dass C mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring ist und dass N ein Ideal von C ist. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Ringhomomorphismus $i\colon R \longrightarrow C/N$ gibt, der injektiv ist, falls $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n = 0$. In Analogie zur Vervollständigung von metrischen Räumen nennt man C/N die $\mathfrak{a}$-*adische Vervollständigung* von R.

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ versehen wir $R/\mathfrak{a}^n$ mit der Quotiententopologie und den projektiven Limes $\varprojlim_{n\to\infty} R/\mathfrak{a}^n \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} R/\mathfrak{a}^n$ mit der Teilraumtopologie der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Ringisomorphismus
$$C/N \longrightarrow \varprojlim_{n\to\infty} R/\mathfrak{a}^n$$
gibt und dass $i(R)$ dabei auf eine dichte Teilmenge von $\varprojlim_{n\to\infty} R/\mathfrak{a}^n$ abgebildet wird.

3. Zeigen Sie: Ist R ein Integritätsring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Hauptideal, so stimmt die durch obigen Isomorphismus auf C/N induzierte Topologie mit der $\mathfrak{a}\,C/N$-adischen Topologie auf C/N überein.

4. Sei $\mathbb{C}[\![z]\!]$ der Ring der formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$ in der Variablen z; d.h. $\mathbb{C}[\![z]\!] = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit komponentenweiser Addition und der Multiplikation wie in Thema 2 von Blatt 4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}[\![z]\!]$ zur (z)-adischen Vervollständigung von $\mathbb{C}[z]$ isomorph ist.

Hinweis. Hinweise zu den topologischen Grundbegriffen finden Sie im Buch „Topologie“ von K. Jänich.

Bitte wenden

Thema 3 (Der Kotangentialraum). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $x \in \operatorname{Spec}(R)$. Der *Kotangentialraum* von $\operatorname{Spec}(R)$ in x ist durch den Quotient

$$T_x \operatorname{Spec}(R) := \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^2 \mathcal{O}_x$$

gegeben; hierbei ist $\mathcal{O}_x = R_{\mathfrak{p}_x}$ der Halm von $\operatorname{Spec}(R)$ in x und $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{p}_x \mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}_x$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_x$.

1. Zeigen Sie, dass Multiplikation mit Elementen aus R eine $k(x)$-Vektorraumstruktur auf dem Kotangentialraum $T_x \operatorname{Spec}(R)$ induziert. Hierbei bezeichnet $k(x) := Q(R/\mathfrak{p}_x)$ den Restklassenkörper bei x.

2. Illustrieren Sie die Definition des Kotangentialraums anhand der folgenden Analogie: Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \colon \mathbf{Opn}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{Ring}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ (s. Blatt 4). Der Halm $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$ von $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ in 0 ist zum lokalen Ring $\mathbb{C}_0[\![z]\!]$ der in einer Umgebung von Null konvergenten Potenzreihen isomorph (s. Thema 2 und Blatt 4). Sei $\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}_0[\![z]\!]$ das maximale Ideal von $\mathbb{C}_0[\![z]\!]$. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathbb{C},0} \arrow[r, "d_0"] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}_0[\![z]\!] \arrow[u] \arrow[r, "d_0^{\mathrm{alg}}"'] & \mathfrak{m}\mathbb{C}_0[\![z]\!]/\mathfrak{m}^2\mathbb{C}_0[\![z]\!] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

   Hierbei ist die Abbildung d_0 durch Auswertung der Ableitung bei 0 gegeben, die Abbildung d_0^{alg} ist durch

$$\begin{aligned} d_0^{\mathrm{alg}} \colon \mathbb{C}_0[\![z]\!] &\longrightarrow \mathfrak{m}\mathbb{C}_0[\![z]\!]/\mathfrak{m}^2\mathbb{C}_0[\![z]\!] \\ f &\longmapsto \overline{f - f(0)}, \end{aligned}$$

   definiert, der linke vertikale Pfeil ist der oben erwähnte Isomorphismus, und der rechte vertikale Pfeil bezeichnet den Isomorphismus, der durch den linearen Koeffizienten gegeben ist.

3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass alle Punkte aus $\operatorname{Spec}(K[X])$ im folgenden Sinne regulär sind: Für alle $x \in \operatorname{Spec}(K[X]) - \{0\}$ ist

$$\dim_{k(x)} T_x \operatorname{Spec}(K[X]) = 1.$$

4. Sei $P := \operatorname{Spec} K[X,Y]/(Y^2 - X^3)$ die Neilsche Parabel (s. Blatt 3). Zeigen Sie, dass der „Nullpunkt“ $x_0 := (\overline{X}, \overline{Y})$ im folgenden Sinne der einzige singuläre Punkt von P ist:

   - Sei $x \in P - \{x_0, 0\}$. Zeigen Sie, dass $\dim_{k(x)} T_x P = 1$ gilt.
   - Zeigen Sie, dass $\dim_{k(x_0)} T_{x_0} P = 2$ ist.

Besprechung am 19. November 2008