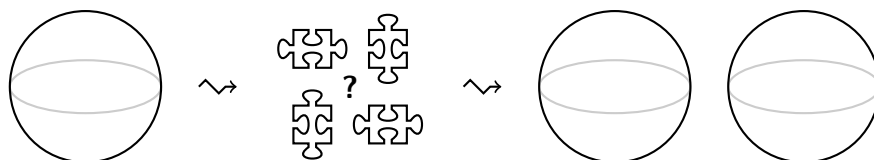


Seminar/Hauptseminar „Amenable Gruppen“

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de)

Februar 2011

Amenable Gruppen liefern eine interessante Verbindung zwischen Gruppentheorie, Geometrie, Analysis und Maßtheorie: Je nach Blickwinkel kann man amenable Gruppen als eine Verallgemeinerung endlicher Gruppen, als Gruppen mit einem bestimmten geometrischen Wachstumsverhalten, als Gruppen mit gewissen Fixpunkteigenschaften oder als Gruppen mit invarianten additiven Maßen ansehen. Diese Vielseitigkeit amenabler Gruppen spiegelt sich in den Anwendungen wider – zum Beispiel spielen (nicht-)amenable Gruppen eine entscheidende Rolle im Banach-Tarski-Paradoxon: Es ist möglich die dreidimensionale Einheitskugel so in endlich viele Teile zu zerlegen, dass diese Teile zu zwei Kopien der dreidimensionalen Einheitskugel zusammengesetzt werden können:



In diesem Seminar werden wir uns mit den verschiedenen Charakterisierungen amenabler Gruppen und Anwendungen amenabler Gruppen in verschiedenen mathematischen Gebieten (insbesondere in der geometrischen bzw. messbaren Gruppentheorie) beschäftigen.

Themen

Als Grundlage für das Seminar werden wir im wesentlichen die Bücher *Amenability* von V. Runde und *Cellular Automata and Groups* von T. Ceccherini-Silberstein und M. Coornaert verwenden.

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie mir bitte möglichst bald Bescheid.

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Vortrag 1 (Paradoxe Zerlegungen). Gruppenoperationen auf Mengen; paradoxe Operationen; paradoxe Gruppen; endliche Gruppen sind nicht paradox; freie Gruppen und ihre grundlegenden Eigenschaften; freie Gruppen sind paradox.

Literatur: [10, Kapitel 0.1], [3, Anhang D], [7, Kapitel 2.2.2, 3.3.1]

Vortrag 2 (Das Banach-Tarski-Paradoxon). Freie Untergruppen in $SO(3)$; das Auswahlaxiom; (schwaches) Banach-Tarski-Paradoxon.

Literatur: [10, Kapitel 0.1]

Amenable Gruppen

Vortrag 3 (Funktionalanalytische Grundlagen – der Satz von Banach-Alaoglu). Netze; der Satz von Tychonoff; die Schwach-*-Topologie; der Satz von Banach-Alaoglu.

Literatur: [3, Anhang A, F], alle Bücher über Funktionalanalysis

Vortrag 4 (Amenable Gruppen – invariante Mittel und endlich-additive Maße). Invariante Mittel auf Gruppen; invariante endlich-additive Wahrscheinlichkeitsmaße auf Gruppen; Äquivalenz dieser Begriffe; Definition amenabler Gruppen; Beispiele.

Literatur: [3, Kapitel 4.1–4.4]

Vortrag 5 (Amenable Gruppen – Vererbungseigenschaften). Vererbungseigenschaften amenabler Gruppen; Fixpunktsatz von Markov-Kakutani; Beispiele; das Von-Neumann-Problem für amenable Gruppen.

Literatur: [3, Kapitel 4.5, 4.6, Anhang G]

Vortrag 6 (Amenable Gruppen – Følner-Bedingungen und Fixpunkteigenschaften). Følner-Bedingungen und Følner-Sequenzen; Beispiele; die Fixpunkteigenschaft für Gruppen mit Følner-Netzen.

Literatur: [3, Kapitel 4.10]

Vortrag 7 (Exkurs: Heiratssätze). Bipartite Graphen; Matchings; der Heiratssatz von Hall; Beispiele; der Haremssatz von Hall.

Literatur: [3, Anhang H], [6, Kapitel 2.II.5], [5, Kapitel I.7]

Vortrag 8 (Der Satz von Tarski). Ausführliche Wiederholung der eingeführten Begriffe; der Satz von Tarski.

Literatur: [3, Kapitel 4.9], [10, Kapitel 0.2]

Amenabilität in der geometrischen Gruppentheorie

Vortrag 9 (Grundlagen der geometrischen Gruppentheorie). Endlich erzeugte Gruppen; Cayley-Graphen; Wortmetriken; Beispiele; Quasi-Isometrien; Quasi-Isometrie-Typ; Bilipschitzäquivalenz.

Literatur: [3, Kapitel 6.1–6.3, 6.13], [4, Kapitel IV], [7, Kapitel 3, 5]

Vortrag 10 (Amenable Gruppen und Quasi-Isometrie). Charakterisierung endlich erzeugter amenabler Gruppen über die isoperimetrische Konstante; Quasi-Isometrie-Invarianz von Amenabilität.

Literatur: [3, Kapitel 6.10, 6.13]

Vortrag 11 (Der Satz von Whyte). Der Satz von Whyte; Anwendungen auf Quasi-Isometrie-Stabilität von freien Produkten.

Literatur: [12], [4, Abschnitt IV.46f]

Vortrag 12 (Amenabilität und Wachstum). Wachstumstypen von endlich erzeugten Gruppen; Beispiele; (Quasi-Isometrie-Invarianz des Wachstums von Gruppen); Gruppen mit subexponentiellem Wachstum sind amenabel.

Literatur: [3, Kapitel 6.4, 6.5, 6.11, (6.13)], [4, Kapitel VI], [2, S. 148f], [7, Kapitel 6]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>
<http://www.ams.org/mathscinet>
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probenvortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem \LaTeX besser kennenzulernen [8]; dafür werden auch \LaTeX -Vorlagen zur Verfügung gestellt:
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/amenablessem_ss11/
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

- [1] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [2] M.R. Bridson, A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Band 319 der *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer, 1999.
- [3] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2010.
- [4] P. de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago University Press, 2000.
- [5] J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, zweite Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.
- [6] K. Jacobs. *Einführung in die Kombinatorik*, de Gruyter, 1983.
- [7] C. Löh. *Geometric group theory, an introduction*, Skript zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“ im WS 2010/11, Universität Regensburg, http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf
- [8] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L^AT_EX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.
Eines der Standardwerke zur Benutzung von L^AT_EX; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [9] Alan L.T. Paterson. *Amenability*, volume 29 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, 1988.
- [10] V. Runde, *Amenability*, volume 1774 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 2002.
- [11] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*, <http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>
Dokumentation des TikZ-Pakets für L^AT_EX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L^AT_EX zu erstellen.
- [12] K. Whyte. Amenability, bi-Lipschitz equivalence, and the von Neumann conjecture, *Duke Math. J.* 99, No. 1, S. 93–112, 1999.