Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 1 vom 6. Mai 2011

Logic, logic, logic. Logic is the beginning of wisdom, Valeris, not the end.
Spock, *Star Trek VI*

Aufgabe 1 (Aussagenlogik)**.** Seien A, B, C aussagenlogische Variablen. Sind die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $(A \lor B) \Longrightarrow A$
2. $(A \land B) \Longrightarrow A$
3. $\bigl(\neg(A \Longrightarrow B)\bigr) \Longleftrightarrow (A \land \neg B)$
4. $\bigl(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)\bigr) \Longleftrightarrow \bigl((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C\bigr)$

Aufgabe 2 (Folgerungen aus Axiomen)**.** Beweisen Sie, dass die Aussage

Der Venusmond Tetra hat seine Umlaufbahn nicht verlassen.

logisch aus den folgenden Axiomen folgt:

① Keiner, der ausgestorben ist, ist Professor Pirkheimer.

② Wenn ein Mond nicht auf die Erde zurast, hat er seine Umlaufbahn nicht verlassen.

③ Es gibt einen Pinguin, Tux.

④ Tetra ist ein Mond der Venus.

⑤ Wenn ein Mond auf die Erde zurast, fallen alle Pinguine um oder alle Dinosaurier sterben aus.

⑥ Professor Pirkheimer ist ein Dinosaurier und Tux ist nicht umgefallen.

Aufgabe 3 (Grundlegende Eigenschaften von Mengen)**.**

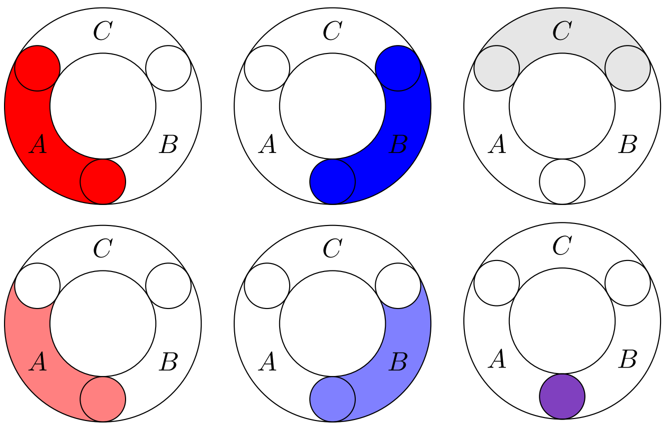
1. Zeigen Sie: Für alle Mengen A, B, C gilt
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$
illustrieren Sie Ihren Beweis durch geeignete Bilder.
2. Seien A und B Mengen. Zeigen Sie, dass A genau dann eine Teilmenge von B ist, wenn $P(A) \subset P(B)$ gilt.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Schnittmengen)**.** Nonewt erzählt Einbliz voller Stolz von seinen Fortschritten in der Mengenlehre:

Nonewt Hach, ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis dafür, dass für alle Mengen A, B, C die Gleichheit $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap B$ gilt: Der Beweis ist graphisch. Wir sehen uns einfach die drei Mengen an [er zeigt auf untenstehende Skizzen], und färben A mit rot, B mit blau und C mit grau. Dann ist $A \setminus C$ der hellrote Bereich, $B \setminus C$ der hellblaue Bereich, und $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ der violette Bereich. Dieser stimmt jedoch, wie man leicht sieht, mit $A \cap B$ überein.

Einbliz Urx, was für schaurige Farben; und auf Deine magischen Bilder falle ich sowieso nicht rein!



Können Sie weiterhelfen? Genauer: Finden Sie mindestens einen Fehler im obigen Argument, und beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für alle Mengen A, B, C gilt $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap B$.

Bonusaufgabe (Paare durch Mengen?)**.** Wegen eines technischen Defekts muss Commander Blorx auf dem Planeten Praion notlanden. Auf Praion gibt es zwar die Grundbegriffe der Mengenlehre, aber keine Paare (im mengentheoretischen Sinne); genau diese benötigt Blorx jedoch um den Produktifikator seines Ufos zu reparieren. Blorx denkt eine Weile nach und definiert dann für alle x, y:

$$\langle x, y \rangle := \bigl\{\{x\}, \{x, y\}\bigr\}.$$

Modelliert dies tatsächlich geordnete Paare? D.h. gilt für alle Mengen x, y, x', und y' die Äquivalenz

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff \bigl((x = x') \wedge (y = y')\bigr) \quad ?$$

Abgabe bis zum 13. Mai 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen

Bitte versehen Sie alle Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Übungsleiters!