Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 2 vom 13. Mai 2011

Aber es gibt einen völlig befriedigenden Weg, den Paradoxien zu entgehen,
ohne Verrat an unserer Wissenschaft zu üben.
[...]
Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir,
wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet,
sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen.
Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.
David Hilbert, *Über das Unendliche, Math. Ann., 95(1), pp. 161–190, 1926*

Aufgabe 1 (Injektiv/surjektiv)**.** Seien X, Y, Z Mengen und seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.

1. Zeigen Sie: Ist $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
2. Sei $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ surjektiv. Ist dann auch f surjektiv?
3. Sei $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ injektiv. Ist dann auch g injektiv?
4. Zeigen Sie: Ist $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ injektiv, so ist auch f injektiv.

Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch einen Beweis oder Angabe eines Gegenbeispiels.

Aufgabe 2 (Potenzmengen sind „groß")**.** Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $X \longrightarrow P(X)$ gibt.
Hinweis. Nehmen Sie an, es gäbe eine surjektive Abbildung $f\colon X \longrightarrow P(X)$ und betrachten Sie dann die Menge $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.

Aufgabe 3 (Eigenschaften von Abbildungen)**.** Einbliz und Nonewt versuchen gerade zu erkennen, was Abbildungen im Innersten zusammenhält:

Nonewt Die kommenden Generationen werden unbeschreibbar dankbar sein für diesen Begriff: Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ zwischen Mengen X und Y heiße *nonewtsch*, wenn folgendes gilt:

$$\exists_{x,x' \in X} \quad \big((x \neq x') \wedge (f(x) \neq f(x'))\big).$$

Einbliz Na, dieser Begriff wird sich wohl kaum durchsetzen – das ist ja einfach die Definition von „nicht injektiv".
Viel interessanter ist doch folgendes: Eine Abbildung $f\colon Y \longrightarrow X$ zwischen Mengen Y und X heiße *einblizsch*, wenn folgendes gilt:

$$\exists_{x \in X} \quad \forall_{y \in Y} \quad f(y) \neq x.$$

Nonewt Du Tulpe! Das ist tatsächlich eine interessante Eigenschaft von Abbildungen, aber sie hat schon längst einen Namen, nämlich „nicht surjektiv" ...

Können Sie weiterhelfen? Begründen Sie Ihre Antworten jeweils durch einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Monotone mengenwertige Abbildungen)**.** Sei X eine Menge. Eine Abbildung $f\colon P(X) \longrightarrow P(X)$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle Teilmengen A, $B \subset X$ mit $A \subset B$ gilt, dass

$$f(A) \subset f(B);$$

eine Teilmenge $A \subset X$ ist ein *Fixpunkt von* f, falls $f(A) = A$.

Sei $f\colon P(X) \longrightarrow P(X)$ eine monoton wachsende Abbildung. Zeigen Sie, dass dann

$$A := \bigcup \{B \subset X \mid B \subset f(B)\}$$

ein Fixpunkt von f ist, indem Sie wie folgt vorgehen:

1. Zeigen Sie, dass $A \subset f(A)$.
2. Zeigen Sie, dass $f(A) \subset A$.

Bonusaufgabe (Satz von Schröder-Bernstein)**.** Bei einem etwas unkonventionellen Beschleunigungsmanöver ist ein wesentlicher Teil des Infinix-Chips im Ufo von Commander Blorx verdampft. Der Infinix-Chip besteht aus zwei Komponenten, Ix und Ypsilon, die jeweils viele (sogar unendlich viele?) Transistoren enthalten. Um das Ufo wieder flott zu machen, braucht Blorx eine neue Ix- und eine neue Ypsilon-Komponente und jeder Transistor von Ix muss mit genau einem Transistor von Ypsilon verbunden werden.

Blorx kann sich mit letzter Kraft noch in eine Werkstatt retten. Dort gelingt es ihm, eine Ix- und eine Ypsilon-Komponente zu erwerben. Die Mechaniker Rerdösch und Beinstern wollen jedoch zunächst nicht dafür garantieren, dass diese beiden Komponenten wirklich kompatibel sind – sie legen aber ihre Hand dafür ins Feuer, dass es eine Injektion der Transistoren dieser Ix-Komponente in die Transistoren der Ypsilon-Komponente gibt und umgekehrt.

Helfen Sie Commander Blorx! Genauer: Zeigen Sie: Sind X und Y Mengen und gibt es injektive Abbildungen $X \longrightarrow Y$ und $Y \longrightarrow X$, so gibt es auch eine bijektive Abbildung $X \longrightarrow Y$.

Hinweis. Betrachten Sie zu $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} h\colon P(X) &\longrightarrow P(X) \\ A &\longmapsto X \setminus g\bigl(Y \setminus f(A)\bigr); \end{aligned}$$

zeigen Sie, dass h monoton wachsend ist und betrachten Sie einen Fixpunkt ...

Abgabe bis zum 20. Mai 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen