Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 5 vom 3. Juni 2011

2. Position of Balls
(a) At the start of each frame the cue-ball is in-hand
and the object balls are positioned on the table as follows:
(i) the Reds in the form of a tightly-packed equilateral triangle,
with the Red at the apex standing on the centre line of the table,
above the Pyramid Spot such that it will be
as close to the Pink as possible without touching it,
and the base of the triangle nearest to, and parallel with, the top cushion.
http://www.worldsnooker.com/page/RulesofSnooker, *Rules of Snooker, Section 3*

Aufgabe 1 (Cauchyfolgen und konvergente Folgen)**.** Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel!

1. Sind alle konvergenten Folgen in angeordneten Körpern beschränkt?
2. Sind alle beschränkten Folgen in angeordneten Körpern Cauchyfolgen?
3. Konvergiert die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ in angeordneten Körpern?
4. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper und es sei $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K konvergent. Ist dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K konvergent?

Aufgabe 2 (Folgensandwich)**.** Einbliz und Nonewt diskutieren Gemeinsamkeiten von Sandwiches und Folgen:

Einbliz Schau, mit Folgen ist es wie mit Sandwiches: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper $(K,\leq)$ und es gelte für alle $n\in\mathbb{N}$, dass

$$a_n < b_n < c_n,$$

d.h. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wie der Belag auf einem Sandwich zwischen den Brötchenhälften $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sind die äußeren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K konvergent, so hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gar keine andere Wahl als auch in K zu konvergieren und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n < \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Nonewt Puh, du kannst froh sein, dass Du nicht von Deiner Sandwichexpertise leben musst! Natürlich ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann auch in K konvergent, aber im allgemeinen gilt nur

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n$$

und nicht unbedingt die strikte Ungleichung.
Ach ja, und dafür braucht man auch nur die schwache Sandwichbedingung $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ als Voraussetzung.

Was gilt tatsächlich für Folgen, die die starke bzw. schwache Sandwichbedingung erfüllen? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils durch einen Beweis oder eine geeignetes Gegenbeispiel!

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Geometrische Folgen)**.** Sei $(K, \leq)$ ein archimedischer angeordneter Körper. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in K$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K konvergiert und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.
Hinweis. Verwenden Sie die *Bernoulli-Ungleichung* (Blatt 4, Aufgabe 3.1).

Aufgabe 4 (Eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge rationaler Zahlen, die durch $a_0 := 1$ und die Rekursion

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

1. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist
$$\frac{5}{4} \leq a_n \leq \frac{8}{5}.$$

2. Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $0 < x < 1$ und der Eigenschaft, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung erfüllt ist:
$$|a_{n+k} - a_n| \leq x^n \cdot |a_k - a_0| \leq x^n \cdot \frac{13}{5}.$$

3. Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 3, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist.

4. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* in $\mathbb{Q}$ konvergiert.

Bonusaufgabe (Permutationen von Folgen)**.** Siegessicher stürzt sich Commander Blorx in das schummrige Casino No-End-Int und beginnt Tri-Set zu spielen. „Nach dem nächsten Spiel höre ich auf!“ vor sich hin murmelnd, spielt er unendlich viele Partien Tri-Set und erhält so eine Folge von Gewinnen in der Währung $\mathbb{Q}$. Entzückt stellt er fest, dass seine Gewinne eine (in $\mathbb{Q}$) konvergente Folge bilden.

Der Casino-Betreiber Dr. Namo ist überzeugt, dass es bei der Siegesserie von Blorx nicht mit rechten Dingen zugegangen sein kann – kann ihm jedoch nichts nachweisen. Als edukative Maßnahme schüttelt er Blorx ordentlich durch; dabei gerät natürlich auch die Folge der Gewinne von Blorx durcheinander.

Kann sich Blorx nun trotzdem noch in einer konvergenten Folge sonnen? D.h. ist jede Permutation einer konvergenten Folge rationaler Zahlen konvergent?
Hinweis. Eine *Permutation* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge $(a_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion ist.

Abgabe bis zum 10. Juni 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen