Übungen zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 7 vom 17. Juni 2011

Die Reihe meines Streichquartetts hast du richtig herausgefunden.
Das muß eine sehr große Mühe gewesen sein
und ich glaube nicht, daß ich die Geduld dazu aufbrächte.
Glaubst du denn, daß man einen Nutzen davon hat, wenn man das weiß?
Ich kann es mir nicht recht vorstellen.
Arnold Schönberg, *Brief an Rudolf Kolisch*

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen)**.**

1. Bestimmen Sie den Real- bzw. Imaginärteil von $(2011 + i) \cdot (2011 - i)$.
2. Bestimmen Sie den Real- bzw. Imaginärteil von $1/(1 + i)$.
3. Bestimmen Sie den Real- bzw. Imaginärteil von $\overline{1/(1 + i)}$.
4. Stellen Sie Multiplikation mit der imaginären Einheit i in $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ geometrisch dar.

Aufgabe 2 (Konvergenz von Reihen)**.** Welche der folgenden reellen Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils!

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2011 + 2012 \cdot n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^{2011} + 2012}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2011^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(1 + \frac{1}{n + 2011}\Bigr)^{n^2}$

Aufgabe 3 (Simultane Konvergenz von Reihen)**.** Einbliz und Nonewt kombinieren begeistert Reihen und Inverse:

Einbliz — Wie schon Bianca Castafiore zu singen pflegte: „Ha, welch Glück, mich zu sehn, so schön.“. Ich habe eine wahrhaft wunderbare Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ entdeckt – für sie sind nämlich sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergente Reihen!

Nonewt — Bei Dir divergiert's aber schon ziemlich absolut! So eine Folge *kann* es überhaupt nicht geben. Aber mit ein paar gekonnten Handgriffen wird daraus etwas vernünftiges: Es gibt natürlich Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft, dass sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als auch $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 \cdot a_n)$ in $\mathbb{R}$ konvergieren.

Können Sie weiterhelfen? Gibt es Folgen mit den von Einbliz bzw. Nonewt behaupteten Eigenschaften?

Hinweis. Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $x^2 + y^2 \geq 2 \cdot x \cdot y$ (warum?).

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Produkte von Reihen)**.** Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch das *Cauchyprodukt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

eine in $\mathbb{R}$ konvergente Reihe ist und dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Bigr).$$

Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor: Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgenden (Varianten) von Partialsummen:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j} \qquad \text{und} \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_k$$

1. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ ist $|s_n - t_n| \leq \varepsilon$.
2. Schließen Sie daraus, dass das Cauchyprodukt in $\mathbb{R}$ konvergiert und, dass man den Wert dieser Reihe wie oben angegeben berechnen kann.

Bonusaufgabe (Umordnungen von nicht absolut konvergenten Reihen)**.** Commander Blorx plant, sich seinen eigenen Asteroiden zu gönnen (die entsprechende Plakette „$\sim$! sweet $\sim$!“ hat er bereits erworben). Er inspiziert daher sein Konto bei der Bank Gru and Snag: Sein Kontoauszug belegt, dass es eine Folge von – leider nicht unbedingt positiven – Buchungen gab, deren zugehörige Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Kann Commander Blorx mit einem Schuss seiner pangalaktischen Permutationspistole die Reihenfolge der Buchungen so verändern, dass die entstehende Reihe konvergent ist und genau den Wert 2011^{2011} besitzt?

Abgabe bis zum 24. Juni 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen