Klausur zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 8. August 2011

Name: Vorname:

Matrikelnummer: Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	12	8	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann
$$(A \lor \neg B) \Longrightarrow \neg(A \land B)$$
eine aussagenlogische Tautologie?

2. Gilt für alle Mengen A und B mit $A \subset B$, dass $P(A) \subset P(B)$ ist?

3. Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in A$ und
$$\forall_{n \in A} \quad (n+1 \in A) \lor (n-1 \in A)$$
Gilt dann bereits $A = \mathbb{N}$?

4. Ist die Relation $\big\{(m,n) \bigm| (m,n \in \mathbb{N}) \land (m \leq n+2)\big\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ transitiv?

Lösung:

1. Nein, denn: Man betrachte das folgende Fragment der zugehörigen Wahrheitstafel:

A	B	$A \lor \neg B$	$\neg(A \land B)$	$(A \lor \neg B) \Longrightarrow \neg(A \land B)$
w	w	w	f	f

2. Ja, denn: Für alle $C \in P(A)$ gilt $C \subset A \subset B$, also auch $C \subset B$, und daher $C \in P(B)$.

   [*Häufige Fehler*: Oft wurden Elemente und Teilmengen von Mengen verwechselt.]

3. Im allgemeinen nicht, denn: Man betrachte zum Beispiel $A := \{0,1\} \subset \mathbb{N}$ (diese Teilmenge von $\mathbb{N}$ erfüllt obige Bedingung, aber natürlich ist $A \neq \mathbb{N}$).

   [Alternativ: Man betrachte die Teilmenge
$$A := 3\mathbb{N} \cup (3\mathbb{N}+1) := \big\{n \in \mathbb{N} \bigm| (3 \text{ teilt } n) \lor \big((n > 0) \land (3 \text{ teilt } n-1)\big)\big\}.$$
   Diese Menge erfült die Bedingung, aber z.B. $2 \notin A$.]

   [*Häufige Fehler*: Es genügt nicht zu sagen, dass obige Bedingung nicht wie das Induktionsprinzip „aussieht“; es muss ein Gegenbeispiel gegeben werden.]

4. Nein, denn: Beispielsweise gilt $(6,4),(4,2) \in \big\{(m,n) \bigm| m \leq n+2\big\}$, aber $(6,2) \notin \big\{(m,n) \bigm| m \leq n+2\big\}$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und für alle $a \in A$ gelte $a < 0$. Ist dann $\sup A < 0$?
2. Erfüllt jede (in $\mathbb{R}$) divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen die folgende Eigenschaft?
$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$
3. Konvergiert die Folge $(e^{\frac{1}{n^2}})_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}$?
4. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{n}}\bigr)^n$ in $\mathbb{R}$?

Lösung:

1. Im allgemeinen nicht, denn: Man betrachte etwa $A = \mathbb{R}_{<0} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\forall_{a\in A} \quad a < 0,$$
aber $\sup A = 0$.

   [*Häufige Fehler*: Es wurde häufig behauptet, dass für alle $A \subset \mathbb{R}_{<0}$ gilt, dass $\sup A = 0$ ist; im allgemeinen ist dies aber natürlich nicht der Fall.]
2. Nein, denn: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert in $\mathbb{R}$, aber sie erfüllt nicht die angegebene Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_{2\cdot n} - 1| = 0$; also existieren kein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad |a_n - 1| \geq \varepsilon.$$

   [*Häufige Fehler*: Es genügt nicht, festzustellen, dass „die“ Negation der Definition von Konvergenz anders „aussieht“ – denn es könnte ja trotzdem sein, dass die obige Bedingung erfüllt ist.]
3. Ja, denn: Die Exponentialfunktion ist stetig und die Folge $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert (gegen 0); also konvergiert auch $(\exp(1/n^2))_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ (gegen 1).

   [Alternativ kann man auch über Monotonie und Beschränktheit argumentieren.]

[*Häufige Fehler*:

- Oft wurde die Folge falsch abgeschrieben; im allgemeinen ist $e^{\frac{1}{n^2}} \neq \frac{1}{e^{n^2}}$!
- Viele haben nicht erwähnt, dass die Exponentialfunktion stetig ist; im allgemeinen vertauschen aber Funktionen *nicht* mit Grenzwerten.
- Einige Lösungen enthielten nicht-existente Konvergenzkriterien oder es wurden Konvergenzkriterien für *Reihen* angewendet.

]

4. Ja, denn: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt:

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4},$$

und daher $\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{n}}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Da die (geometrische) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{n}}\right)^n$.

[Alternativ: Die Folge $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ (gegen e); insbesondere exisitert ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(1+1/n)^n \leq C$. Damit erhält man, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{n}}\right)^n \leq \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n} \leq \frac{C}{2^n}.$$

Die (geometrische) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergiert aber; also konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{n}}\right)^n$.]

[*Häufige Fehler*:

- Oft wurde die Reihe falsch abgeschrieben.
- Um Konvergenz nachzuweisen genügt es *nicht* zu zeigen, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden! (Man denke an die harmonische Reihe.)
- In vielen Lösungen wurde das Majorantenkriterium auf eine gewisse geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ angewendet, wobei aber x von n abhängt – das geht natürlich nicht.
- Oft wurde das Quotientenkriterium nicht richtig angewendet (Voraussetzungen nochmal genau anschauen!).

]

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f([0,1]) = [0,2] \setminus \{1\}$?
2. Gibt es eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f([0,1]) = \mathbb{R}_{>0}$?
3. Ist jede stetige und streng monotone Funktion $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ surjektiv?
4. Ist die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid \ln(x^2+1) < x\}$ in $\mathbb{R}$ offen?

Lösung:

1. Nein, denn: Nach dem Zwischenwertsatz (angewendet auf ein Urbild von 0 bzw. 2) ist dies nicht möglich.

   [*Häufige Fehler*: Oft wurde eine gewisse Funktion als Gegenbeispiel angegeben; das genügt natürlich nicht – es muss ein allgemeines Argument gegeben werden.

   Außerdem wurden in vielen Lösungen Formulierungen wie „unstetig bei 1“ verwendet, obwohl es sich dabei um die 1 aus dem Bildbereich handeln sollte. Nach Definition kann eine Funktion aber nur in Punkten des Startbereichs stetig oder unstetig sein.]

2. Nein, denn: Die Menge $[0,1]$ ist kompakt und nach dem Extremalprinzip nimmt jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein Maximum/Minimum an, aber die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ enthält kein Maximum/Minimum.

   [Es genügt natürlich, mit dem Maximum oder dem Minimum zu argumentieren.]

   [*Häufige Fehler*: Hier wurden oft falsche Beispiele gegeben (z.B. die Exponentialfunktion?!); dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass nicht genau verstanden wurde, was das Bild einer Menge unter einer Funktion ist.]

3. Nein, denn: Man betrachte etwa die stetige und streng monoton wachsende Funktion $1/2 \cdot \mathrm{id}_{[0,1]}\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, die nicht surjektiv ist.

   [*Häufige Fehler*: Viele haben behauptet, dass für Funktionen $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ Injektivität und Surjektivität äquivalent sind; dies ist jedoch falsch (s. obiges Beispiel).]

4. Ja, denn: Man betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x^2+1) - x, \end{aligned}$$

die als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \ln(x^2+1) < x\} = f^{-1}(\mathbb{R}_{<0}).$$

Die Teilmenge $\mathbb{R}_{<0} \subset \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$, also ist auch $f^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen in $\mathbb{R}$.

[Alternativ kann man die obige Menge expliziter beschreiben und darüber argumentieren.]

[*Häufige Fehler*: Es genügt nicht, einfach nur die Definition von *offen* aufzuschreiben oder zu behaupten das Komplement wäre abgeschlossen.

In mehreren Lösungen wurde versucht, statt mit obiger Funktion f mit der Funktion $g\colon x \longmapsto \ln(x^2+1)$ zu argumentieren und dann

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \ln(x^2+1) < x\} = g^{-1}(\mathbb{R}_{<x})$$

zu verwenden; diese Gleichung macht jedoch keinen Sinn – woher kommt das x auf der rechten Seite?!]

Aufgabe 4 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!
2. Formulieren Sie den Satz über partielle Integration!
3. Beweisen Sie den Satz über partielle Integration mit Hilfe des (zweiten) Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Lösung:

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiter sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit
$$\forall_{x\in(a,b)} \quad F'(x) = f(x).$$
Dann gilt
$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$
[*Häufige Fehler*: Oft war nicht klar zu erkennen, was die Voraussetzungen sind und was die Folgerung/Behauptung ist; außerdem waren die Voraussetzungen zumeist unvollständig oder inkorrekt.

   Einige haben den ersten und den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu einem großen Durcheinander ohne sinnvolle Aussage vermischt.]

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ und seien $f, g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Dann ist:
$$\int_a^b f' \cdot g = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b f \cdot g'$$
[Dabei bezeichnen f' und g' die stetigen Fortsetzungen der Ableitungen von f bzw. g auf $[a, b]$, vgl. Vorlesung.]

   [*Häufige Fehler*: Auch hier war oft nicht klar zu erkennen, was die Voraussetzungen sind und was die Folgerung/Behauptung ist; außerdem waren die Voraussetzungen zumeist unvollständig oder inkorrekt.]

3. Seien f, g wie in Teil 2. Dann ist auch $F := f \cdot g$ in $C^1([a,b],\mathbb{R})$ (nach den Vererbungseigenschaften für stetige bzw. differenzierbare Funktionen). Nach der Leibnizregel gilt dabei

$$\forall_{x\in(a,b)} \quad F'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

und (die stetigen Fortsetzungen auf $[a,b]$ von) $f'\cdot g$, $f\cdot g'$ und $f'\cdot g + g\cdot g'$ sind auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar.

Damit folgt aus dem (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$(f\cdot g)(b) - (f\cdot g)(a) = \int_a^b \big(f'\cdot g + f\cdot g'\big) = \int_a^b f'\cdot g + \int_a^b f\cdot g',$$

und damit die Behauptung.

[*Häufige Fehler*: Es wurde nicht immer argumentiert, warum die Funktionen, die in den jeweiligen Beweisen integriert wurden, tatsächlich Riemann-integrierbar sind.]

Aufgabe 5 (3 + 5 + 4 = 12 Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition der Funktionen $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an.

2. Beweisen Sie, dass $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und zeigen Sie, dass $\sin' = \cos$ ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \cdot \cos x \end{aligned}$$

auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist und bestimmen Sie $\int_0^1 \sin x \cdot \cos x \; dx$.

Lösung:

1. Die Funktionen sin und cos sind definiert durch

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

(diese Potenzreihen konvergieren auf $\mathbb{R}$ absolut).

[*Häufige Fehler*: In erschreckend vielen Abgaben waren die Definitionen von Sinus/Cosinus falsch. Manchmal wurde vergessen, die Reihe zu bilden, oder die rechte Seite hing überhaupt nicht vom Funktionsargument ab; Sie sollten immer überprüfen, dass alle Variablen auf der rechten Seite eingeführt sind und dass die Funktionsvariable vernünftig verwendet wird.

Hier oder zumindestens in der Lösung zur zweiten Teilaufgabe musste außerdem erwähnt werden, dass obige Reihen wirklich konvergent sind (das gehört zu einer Definition über Reihen immer dazu).]

2. Die Funktion sin ist durch eine Potenzreihe gegeben, die laut Vorlesung für jedes Arugment in $\mathbb{R}_{>0}$ absolut konvergiert.

   Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach dem Satz über die Differentiation von Potenzreihen ist sin also auf dem Intervall $(-r, r)$ differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}\forall_{x\in(-r,r)} \quad \sin|'_{(-r,r)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2k+1) \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \cos(x).\end{aligned}$$

   Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt daraus, dass sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $\sin' = \cos$ gilt.

   [*Häufige Fehler*:

   – Es muss begründet werden, warum Differentiation und die Reihe vertauscht werden können (z.B., indem wie oben der Satz über Differentiation von Potenzreihen verwendet werden).

   – Sinus und Cosinus sind *keine* Polynomfunktionen – es genügt also nicht, über die Differentiation von Polynomen zu argumentieren!

   – Manche wollten die Differenzierbarkeit aus der Stetigkeit folgern; im allgemeinen sind stetige Funktionen aber *nicht* differenzierbar! (Man betrachte etwa die Betragsfunktion.)

   ]

3. Als Produkt stetiger Funktionen ist $\sin \cdot \cos$ auf $\mathbb{R}$ stetig, also insbesondere auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar. Mit Integration durch Substitution (mit der Subsititution „$\sin(x) \mapsto z$“), Aufgabenteil 1 und dem (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin x \cdot \cos x \, dx &= \int_{\sin 0}^{\sin 1} z \, dz = \left[\frac{1}{2} \cdot z^2\right]_{z=\sin 0}^{z=\sin 1} = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 1 - \sin^2 0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin^2 1.\end{aligned}$$

   [Alternativ: Mit partieller Integration und Aufgabenteil 1 erhalten wir

$$\int_0^1 \sin x \cdot \cos x \, dx = \big[\sin x \cdot \sin x\big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \cos x \cdot \sin x \, dx,$$

und damit

$$\int_0^1 \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin^2 x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 1 - \sin^2 0)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sin^2 1.$$

Oder man gibt direkt eine Stammfunktion an und argumentiert über den (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.]

[*Häufige Fehler*: (Die Tatsache, dass Produkte Riemann-integrierbarer Funktionen Riemann-integrierbar sind, haben wir in der Vorlesung nicht behandelt.)

Oft gab es hier Rechenfehler bei den Vorzeichen (die aber in diesem Fall wirklich essentiell sind). Es wurde nicht immer erklärt, was in den einzelnen Schritten passiert (z.B. welche Integrationstechnik verwendet wird).

Es ist $\sin(1) \neq 1$.]

Aufgabe 6 (4 + 4 = 8 Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2^{x-1} \cdot (x^2+1). \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, und berechnen Sie die Ableitung von f.
2. Gibt es eine differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g' = f$, die außerdem $g(0) = 1$ und $g(1) = 0$ erfüllt?

Lösung:

1. Wegen

   $$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad f(x) = 2^{x-1} \cdot (x^2+1) = \exp\bigl(\ln 2 \cdot (x-1)\bigr) \cdot (x^2+1)$$

   ist f als Komposition/Produkt von stetig differenzierbaren Funktionen auch stetig differenzierbar.

   Es gilt (mit Leibniz- und Kettenregel) dabei

   $$\begin{aligned} \forall_{x\in\mathbb{R}} \quad f'(x) &= \exp\bigl(\ln 2 \cdot (x-1)\bigr) \cdot \ln 2 \cdot (x^2+1) + \exp\bigl(\ln 2 \cdot (x-1)\bigr) \cdot 2 \cdot x \\ &= 2^{x-1} \cdot \bigl(\ln 2 \cdot (x^2+1) + 2 \cdot x\bigr). \end{aligned}$$

   [*Häufige Fehler*:

   – Die Ableitung der Funktion $x \longmapsto 2^{x-1}$ ist *nicht* $x \longmapsto (x-1) \cdot 2^{x-2}$.
   – Die Ableitung der Funktion $x \longmapsto \ln 2$ ist *nicht* $x \longmapsto 1/2$.
   – Oft wurde nur gezeigt, dass f differenzierbar ist, aber nicht, dass f tatsächlich in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ liegt (also, dass die Ableitung stetig ist).

   ]

2. Nein, denn: *Angenommen* es gäbe eine solche Funktion g. Der Mittelwertsatz angewendet auf $g|_{[0,1]}$ liefert dann ein $\xi \in (0,1)$ mit

   $$f(\xi) = g'(\xi) = \frac{g(1) - g(0)}{1} = -1,$$

   im Widerspruch zu $f > 0$ (was man leicht nachrechnen kann). Also kann es keine solche Funktion g geben.

[Alternativ kann man über den (zweiten) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung argumentieren, indem man das Integral $\int_0^1 f$ abschätzt oder gar berechnet.]

[*Häufige Fehler*: Hier wurde oft nicht sauber formuliert, z.B.: Ist $g(0) > g(1)$, so heißt dies natürlich im allgemeinen nicht, dass g auf $[0, 1]$ monoton fallend ist . . .]

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass keine Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(0) = 0 = f(1)$ existiert, die stetig ist und jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt.

Lösung: Angenommen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt die obige Bedingung. Da f stetig und $[0,1]$ kompakt ist, existiert nach dem Extremalprinzip ein $x_0 \in [0,1]$ mit

$$\forall_{x\in[0,1]} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Nach Voraussetzung existiert dann außerdem ein $x_1 \in [0,1] \setminus \{x_0\}$ mit $f(x_1) = f(x_0)$ und

$$\forall_{x\in[0,1]\setminus\{x_0,x_1\}} \quad f(x) < f(x_0) = f(x_1).$$

Ohne Einschränkung gelte $x_0 < x_1$. Dann gilt (da f nach Voraussetzung keine negativen Werte annimmt)

$$f(0) = f(1) = 0 \leq f\Big(\frac{x_0 + x_1}{2}\Big) < f(x_0) = f(x_1).$$

Nach dem Zwischenwertsatz existieren also $\xi_0 \in [0, x_0]$ und $\xi_1 \in [x_1, 1]$ mit

$$f(\xi_0) = f\Big(\frac{x_0 + x_1}{2}\Big) = f(\xi_1)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass f jeden Wert genau zweimal annimmt.

[*Häufige Fehler*:

- Es hat sich herausgestellt, dass die Voraussetzung $f(0) = 0 = f(1)$ (die eigentlich nur dazu dienen sollte, etliche Fallunterscheidungen zu vermeiden) viele dazu verleitet hat, den Satz von Rolle anzuwenden; die gegebene Funktion war jedoch nur als stetig vorausgesetzt und für den Satz von Rolle benötigt man Differenzierbarkeit!
- Einige haben nur ein Bild gemalt, aber keinerlei exakte Argumente geliefert. (Aber ein Bild kann natürlich helfen, eine Beweisidee zu finden.)
- Oft wurden zusätzliche Symmetriebedingungen an die gegebene Funktion gestellt, die jedoch im allgemeinen nicht vorhanden sind (z.B. Achsensymmetrie).
- Es genügt nicht, mit einer konkreten Funktion zu argumentieren.

]