Probeklausur zur Analysis I

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — 27. Juli 2011

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□□ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	7	13	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann
$$(A \land B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$$
eine aussagenlogische Tautologie?
2. Gilt $(A \cap B) \cap C = A \cap (A \cup C)$ für alle Mengen A, B, C ?
3. Sind alle reflexiven Relationen symmetrisch?
4. Ist $\bigl\{(m,n) \bigm| (m \in \mathbb{N}) \land (n \in \mathbb{N}) \land \bigl(\exists_{k \in \mathbb{N}} \quad m + n = k\bigr)\bigr\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$?

Lösung:

1. Ja, denn: Wir betrachten die zugehörige Wahrheitstafel:

A	B	$A \land B$	$A \Longrightarrow B$	$(A \land B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	f	f	w	w
f	w	f	w	w

2. Nein, denn: Wir betrachten die Mengen $B := \emptyset$, $A := \{\emptyset\} =: C$ (oder irgendeine andere nicht-leere Menge). Dann gilt
$$(A \cap B) \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset \neq \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \bigl(\{\emptyset\} \cup \{\emptyset\}\bigr) = A \cap (A \cup C).$$
3. Nein, denn: Man betrachte etwa die Relation „$\leq$" auf $\mathbb{R}$, die reflexiv aber nicht symmetrisch ist.
4. Ja, denn: Es gilt
$$\forall_{m,n \in \mathbb{N}} \quad \exists_{k \in \mathbb{N}} \quad m + n = k$$
(nämlich „$k = m + n$"), und damit
$$\bigl\{(m,n) \bigm| (m \in \mathbb{N}) \land (n \in \mathbb{N}) \land \bigl(\exists_{k \in \mathbb{N}} \quad m + n = k\bigr)\bigr\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$
Die Relation $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist aber natürlich eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ genau dann monoton wachsend, wenn folgendes gilt?
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \exists_{m\in\mathbb{N}} \quad \bigl((m > n) \wedge (a_m \geq a_n)\bigr).$$
2. Besitzt jede Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$?
3. Ist die Folge $(\frac{\sqrt{n}}{n+2011})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent?
4. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}-1})^n$ in $\mathbb{R}$ konvergent?

Lösung:

1. Nein, denn: Zum Beispiel erfüllt die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ obige Bedingung (für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $2n+2 > n$ und $1 = (-1)^{2n+2} \geq (-1)^n$), aber diese Folge ist nicht monoton wachsend.
2. Ja, denn: Jede Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist auch eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und die reellen Zahlen sind Cauchy-vollständig.
3. Ja, denn: Diese ist eine Nullfolge, denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $N \in \mathbb{N}$ größer als $1/\varepsilon^2$. Dann gilt
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad \left|\frac{\sqrt{n}}{n+2011} - 0\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon.$$
4. Nein, denn: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)^n} \geq \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n+1}\right)^n} = \frac{1}{n+1}.$$
und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ divergiert (harmonische Reihe); also divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}-1})^n$ nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sind alle stetigen Funktionen $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt?
2. Sind alle stetigen Funktionen $(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt?
3. Sind alle injektiven Funktionen $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig?
4. Gibt es Teilmengen von $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{R}$ offen und abgeschlossen sind?

Lösung:

1. Ja, denn: Das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ ist kompakt; also nimmt jede stetige Funktion $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ nach dem Extremalprinzip ihr Minimum/Maxium auf $[0,1]$ an und ist insbesondere beschränkt.
2. Nein, denn: Man betrachte etwa die Funktion
$$\begin{aligned} (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1/x. \end{aligned}$$
3. Nein, denn: Man betrachte etwa die Funktion
$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{falls } x = 1; \end{cases} \end{aligned}$$
diese Funktion ist injektiv (da streng monoton wachsend), aber nicht stetig in 1.
4. Ja, denn: Zum Beispiel ist $\emptyset \subset \mathbb{R}$ offen (klar nach Definition) und abgeschlossen in $\mathbb{R}$ (da $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ offen ist).

Aufgabe 4 $(3+3+4=10$ Punkte$)$**.**

1. Formulieren Sie den Satz von Rolle!
2. Formulieren Sie den Mittelwertsatz!
3. Beweisen Sie den Mittelwertsatz mit Hilfe des Satzes von Rolle.

Lösung:

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar ist, mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.
2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
3. Sei f eine Funktion, die die Voraussetzungen aus Teil 2 erfüllt. Dann ist (nach den Vererbungseigenschaften für stetige/differenzierbare Funktionen) auch
$$g := f \cdot (b-a) - \big(f(b) - f(a)\big) \cdot \mathrm{id}_{[a,b]}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), und es gilt
$$g(b) = f(b) \cdot (b-a) - \big(f(b) - f(a)\big) \cdot b = f(a) \cdot b - f(b) \cdot a = g(a).$$
Nach dem Satz von Rolle existiert daher ein $\xi \in (a,b)$ mit
$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) \cdot (b-a) - \big(f(b) - f(a)\big),$$
woraus der Mittelwertsatz folgt.

Aufgabe 5 (4 + 3 = 7 Punkte)**.** Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} f_n \colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot x^n. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, gegen die die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ auf $[0,1]$ punktweise konvergiert.
2. Ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig auf $[0,1]$?

Lösung:

1. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n) = 1$ und für alle $x \in [0,1)$ ist $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Daher folgt mit den Grenzwertsätzen:

   $$\forall_{x \in [0,1]} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot x^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

   Mit anderen Worten: Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen die Funktion

   $$\begin{aligned} f \colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Nein, denn: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die Funktion f_n stetig. Würde die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f konvergieren, so wäre auch die Grenzfunktion f stetig; aber f ist nicht stetig in 1. Also kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

   [Alternativ kann man auch mit einfacher Rechnung zeigen, dass die Funktionenfolge nicht gleichmäßig konvergiert.]

Aufgabe 6 ($4+3+3+3=13$ Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x+2011)^x. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$ ist, und berechnen Sie die Ableitung von f auf $\mathbb{R}_{>0}$.
2. Ist f monoton?
3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \cdot f'(x^2+1) \end{aligned}$$

auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist.

4. Bestimmen Sie $\int_0^1 g$.

Lösung:

1. Nach Definition gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$, dass $f(x) = \exp\bigl(\ln(x+2011)\cdot x\bigr)$. Als Komposition von C^1-Funktionen ist f daher nach den Vererbungseigenschaften stetiger bzw. differenzierbarer Funktionen auch in $C^1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R})$.

   Mit der Ketten- und Leibnizregel erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$, dass

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\bigl(\ln(x+2011)\cdot x\bigr)\cdot\Bigl(\frac{x}{x+2011} + \ln(x+2011)\cdot 1\Bigr) \\ &= (x+2011)^x \cdot \Bigl(\frac{x}{x+2011} + \ln(x+2011)\Bigr). \end{aligned}$$

2. Ja, denn: Die Exponentialfunktion, der natürliche Logarithmus und die auftauchenden linearen Funktionen sind monoton wachsend; daher ist auch die Komposition f monoton wachsend.

   [Alternativ kann man auch darüber argumentieren, dass die Ableitung positiv ist.]

3. Die Funktion g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig und damit insbesondere auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar.

4. Wir benutzen die Substitutionsregel („$z \leftrightarrow x^2+1$“) und den Hauptsatz um das Integral zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g &= \int_0^1 x\cdot f'(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_1^2 f'(z)\,dz = \frac{1}{2}\cdot\Bigl[f(z)\Bigr]_{z=1}^{z=2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(2013^2 - 2012). \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass dann $\int_0^1 f > 0$ ist.

Lösung: Nach dem Extremalprinzip nimmt die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $[0,1]$ ein Minimum an, das nach Voraussetzung größer als Null ist. Also existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall_{x\in[0,1]} \quad f(x) \geq \varepsilon.$$

Aus der Monotonie des Riemann-Integrals folgt daher

$$\int_0^1 f \geq \int_0^1 \varepsilon = \varepsilon > 0.$$