Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 14 vom 3. Februar 2012

Aufgabe 1 (Kurzskript)**.** Finden Sie möglichst viele Fehler im Kurzskript zur Vorlesung!

Aufgabe 2 (Fundamentalmatrix?)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist.

> *Behauptung.* Es ist
>
> $$\begin{aligned} Y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ t &\longmapsto \exp\biggl(\int_0^t A(s)\,ds\biggr) \end{aligned}$$
>
> eine Fundamentalmatrix für das lineare System
>
> $$\begin{aligned} \text{Gesucht:}\quad & y \in C^1\bigl(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^n\rangle\bigr) \quad \text{mit} \\ & y' \;=\; A\cdot y. \end{aligned}$$
>
> *Beweis.* Analog zum eindimensionalen Fall kann man (indem man die partiellen Ableitungen bestimmt) zeigen, dass die matrixwertige Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ differenzierbar ist und, dass
>
> $$\bigl(\exp'(X)\bigr)(H) = \exp(X)\cdot H$$
>
> für alle $X, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.
>
> Mit der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (komponentenweise angewendet) folgt also, dass Y stetig differenzierbar ist und dass
>
> $$\begin{aligned} Y'(t) &= \exp\biggl(\int_0^t A(s)\,ds\biggr)\cdot A(t) \\ &= A(t)\cdot Y(t) \end{aligned}$$
>
> für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist Y eine Lösungsmatrix des obigen Systems.
>
> Da $Y(0) = \exp(0 \in \mathbb{R}^{n\times n})$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist, folgt, dass Y eine Fundamentalmatrix des obigen Systems ist. □

Lösungshinweise. Der Fehler im „Beweis“ liegt darin, dass in der letzten Rechung einfach die Matrizen $A(t)$ und $Y(t)$ vertauscht werden. Für $n > 0$ lassen sich aber Matrizen im allgemeinen nicht vertauschen.

[Außerdem stimmt auch die Behauptung über die Ableitung der matrixwertigen Exponentialfunktion im allgemeinen nicht; auch hier spielt wieder die Tatsache, dass Matrixmultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist, eine wichtige Rolle.]

Aufgabe 3 (lineare Differentialgleichung I)**.** Sei

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ der folgenden linearen Differentialgleichung (und begründen Sie Ihre Antwort):

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:} \quad & y \in C^1\big(\langle \mathbb{R}^1 \rangle, \langle \mathbb{R}^2 \rangle\big) \quad \text{mit} \\ & y' \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot y + b. \end{aligned}$$

Lösungshinweise. Wir erhalten die folgende Fundamentalmatrix der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mittels der Formel für Jordankästchen:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ &t \longmapsto \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(2 \cdot t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mittels Variation der Konstanten können wir eine Lösung $y \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ der inhomogenen finden, indem wir für $t \in \mathbb{R}$ definieren

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int_0^t e^{-2 \cdot s} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \cdot s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \; ds \\ &= e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int_0^t e^{-2 \cdot s} \cdot \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} \; ds \\ &= e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\int_0^t e^{-2 \cdot s} \cdot s \; ds \\ \int_0^t e^{-2 \cdot s} \; ds \end{pmatrix} \\ &= e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{e^{2t}}{4} + t \cdot e^{2t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Lösungsraum:

$$\left\{ \left(t \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{e^{2t}}{4} + t \cdot e^{2t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \end{pmatrix} + a \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2).$$

Aufgabe 4 (lineare Differentialgleichung II)**.** Bestimmen Sie alle Lösungen in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ der folgenden linearen Differentialgleichung (und begründen Sie Ihre Antwort):

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:} \quad & y \in C^1\big(\langle \mathbb{R}^1 \rangle, \langle \mathbb{R}^3 \rangle\big) \quad \text{mit} \\ & y' \quad = \quad \begin{pmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot y. \end{aligned}$$

Lösungshinweise. Eine Fundamentalmatrix dieser Differentialgleichung ist gegeben durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} e^{2012\cdot t} & \\ & \exp\left(t\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der untere Block ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, nämlich

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

[Man kann diese Darstellung mit den Standardtechniken aus der linearen Algebra bestimmen.] Damit erhalten wir für für alle $t \in \mathbb{R}$ [vergleiche auch Bemerkung 5.26, in deren Notation wir hier $\lambda = 1 - i$ und $u = (1, i)^\top$ verwenden]

$$\exp\left(t\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos(-t) & \sin(-t) \\ -\sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir insgesamt als Fundamentalmatrix

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} e^{2012\cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t\cdot\cos t & -e^t\cdot\sin t \\ 0 & e^t\cdot\sin t & e^t\cdot\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bonusaufgabe (Forensik)**.** Commander Blorx plant für einen brandneuen Prototyp eines positronischen Roboters einen Eigentümerwechsel. Um den derzeitigen Eigentümer Nogso nicht zu stören steigt Commander Blorx äußerst diskret in dessen Villa ein. Entsetzt muss er feststellen, dass ihm jemand zuvorgekommen ist – der Prototyp ist entwendet und Nogso liegt in unvorteilhafter Position tot auf einem wertvollen Teppich.

Zu allem Überfluss wurde Blorx beim Betreten der Villa um 7:00 Uhr (!) von einer Überwachungskamera gefilmt. Der übereifrige Ermittler (mit wichtiger Sonnenbrille) in der Mordsache Nogso versucht daher, Blorx den Mord in die Schuhe zu schieben.

Nach den Ermittlungsakten betrug die Körpertemperatur von Nogso um 8:00 Uhr beim Eintreffen der Polizei 28°C und um 9:00 Uhr noch 26°C. Außerdem ist bekannt, dass Nogso zu Lebzeiten gesunde 37°C warm war und dass Nogsos Villa dank der Klimaanlage immer angenehme 24°C Lufttemperatur hat.

Wie kann Blorx beweisen, dass Nogso bei seiner Ankunft bereits tot gewesen sein muss?

Hinweis. Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz, erfüllt die Temperatur $y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eines abkühlenden Körpers (Zeiteinheit: Stunden, Temperatureinheit: Grad Celsius) die Gleichung

$$y' = -c\cdot(y - \tau),$$

wobei die Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ misst wie stark der Körper Wärme abgibt und $\tau \in \mathbb{R}$ die Umgebungstemperatur ist.

Lösungshinweise. Wir lösen zunächst die einfache lineare Differentialgleichung. Der Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung

$$\text{Gesucht:} \quad y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^1\rangle\big) \quad \text{mit}$$
$$y' \quad = \quad -c \cdot y$$

ist natürlich

$$\big\{(t \mapsto a \cdot e^{-c \cdot t}) \;\big|\; a \in \mathbb{R}\big\} \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Mittels Variation der Konstanten erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung [man kann diese aber auch einfach direkt ablesen] durch

$$t \mapsto \left(e^{-c \cdot t} \cdot \int_o^t e^{c \cdot s} \cdot \tau \cdot c \, ds = \tau - \tau \cdot e^{-c \cdot t}\right).$$

Damit erhalten wir als Lösungsgraum der inhomogenen Differentialgleichung

$$\big\{(t \mapsto \tau + a \cdot e^{-c \cdot t}) \;\big|\; a \in \mathbb{R}\big\} \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Wir setzen das Eintreffen der Polizei als Startzeitpunkt an [das macht die Rechnungen etwas einfacher, aber man kann auch z.B. „8“ als Startzeitpunkt wählen]. Seien dann $a, c \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$w = (t \mapsto 24 + a \cdot e^{-c \cdot t})$$

das vorliegende Problem beschreibt. Dann gilt

$$28 = w(0) = 24 + a \cdot e^0,$$

also erhalten wir $a = 4$. Weiter gilt nach Voraussetzung

$$26 = w(1) = 24 + 4 \cdot e^{-c},$$

und damit $c = \ln 2$.

Jetzt wissen wir also, dass die Körpertemperatur von Nogso zum Zeitpunkt t nach seinem Ableben zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$w(t) = 24 + 4 \cdot \frac{1}{2^t}$$

beschrieben wird. Diese ist monoton fallend und wir können daher wegen $w(t_0) = 37$ seinen Todeszeitpunkt berechnen. Wegen

$$w(-1) = 32 < 37 = w(t_0)$$

kann Blorx also nicht der Täter sein.

Abgabe bis zum **8. Februar 2012, 8:00 Uhr (!)**, in die Briefkästen