Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 3 vom 4. November 2011

Aufgabe 1 (Bilder offener Mengen)**.** Seien (X, T_X), (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung; wir nennen die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ *offen*, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet, d.h., wenn

$$\forall_{U \in T_X} \quad f(U) \in T_Y$$

gilt. Treffen die folgenden Aussagen zu? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist f stetig, so ist f offen.
2. Ist f offen, so ist f stetig.

Aufgabe 2 (Inneres, Abschluss, Rand)**.** Wir betrachten die Teilmenge

$$Y := \bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| \|x\|_2 < 1\bigr\} \cup \bigl\{(0,2)\bigr\} \cup \bigl\{(x,0) \bigm| x \in \mathbb{R}\bigr\}$$

von $\mathbb{R}^2$.

1. Bestimmen Sie den Abschluss, das Innere und den Rand von Y bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie diese Mengen.
2. Bestimmen Sie den Abschluss, das Innere und den Rand von Y bezüglich der Klumpentopologie auf $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie diese Mengen.

Aufgabe 3 (Abschluss)**.**

1. Sei (X, T_X) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$. Zu einem Punkt x in X sei $U(x)$ die Menge der offenen Umgebungen von x in X. Zeigen Sie, dass
$$\overline{Y} = \bigl\{x \in X \bigm| \forall_{U \in U(x)} \quad U \cap Y \neq \emptyset\bigr\}$$
ist. Illustrieren Sie Ihren Beweis durch geeignete schematische Skizzen.
2. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie sowohl ein Gegenbeispiel zur aufgestellten Behauptung angeben als auch erklären, welcher Schritt inkorrekt ist.

   Behauptung. Ist (X, T_X) ein topologischer Raum und ist $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X, so ist $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{Y_n}$.

   Beweis. Sei $x \in \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n}$. Dann schneidet jede Umgebung U von x in X die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U \cap Y_n \neq \emptyset$. Also liegt x im Abschluss von Y_n. Damit folgt, dass $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{Y_n}$ gilt. $\square$

Aufgabe 4 (Topologische Invarianz von Eindimensionalität)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ genau dann bezüglich der Standardtopologie zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, wenn $n = 1$ ist.
Hinweis. Was passiert, wenn man jeweils einen Punkt entfernt?

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Noch mehr Abschlüsse)**.** Commander Blorx wendet aus Langeweile seine erst kürzlich erworbenen galaktischen Abschluss- und Komplementstrahlenkanonen in wirrer Abfolge auf den Sternenhaufen iKuKow-Star in der Galaxie G'ToyLoop an. Wieviele verschiedene Sternenkonfigurationen kann Blorx auf diese Weise maximal erhalten?

Genauer: Sei (X, T_X) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$. Wieviele verschiedene Mengen kann man aus Y maximal erhalten, wenn man (in beliebiger Abfolge endlich oft) die Funktionen „Abschluss in X bilden" bzw. „Komplement in X bilden" auf die Startmenge Y anwendet? Zeigen Sie außerdem, dass Ihre Abschätzung optimal ist.

Hinweis. Die gesuchte Anzahl liegt zwischen 10 und 20 (!).

Abgabe bis zum 11. November 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen