Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 4 vom 11. November 2011

Aufgabe 1 (Hausdorffräume und stetige Abbildungen)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume.

1. Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig und surjektiv, und sei X hausdorffsch. Ist dann auch $Y = f(X)$ hausdorffsch? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Zeigen Sie: Sind X und Y homöomorph, so ist X genau dann hausdorffsch, wenn Y hausdorffsch ist.

Aufgabe 2 (Hausdorffräume und die Diagonale)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann hausdorffsch ist, wenn die *Diagonale*

$$\Delta_X := \bigl\{(x, x) \bigm| x \in X\bigr\} \subset X \times X$$

in $X \times X$ (bezüglich der Produkttopologie) abgeschlossen ist. Illustrieren Sie Ihren Beweis durch geeignete schematische Skizzen!

Aufgabe 3 (Produkte kompakter Räume, I)**.** Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis" nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist und ein Beispiel angeben, das zeigt, dass dieser Schritt nicht korrekt ist. Ergänzen Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete schematische Skizzen!

> *Behauptung.* Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Sind X und Y kompakt, so ist das Produkt $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie kompakt.
>
> *Beweis.* Sei U eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Nach Definition der Produkttopologie kann jede offene Menge in $X \times Y$ durch „offene Kästchen" überdeckt werden (d.h. durch Mengen der Form $V_X \times V_Y$, wobei $V_X \subset X$ in X offen ist und $V_Y \subset Y$ in Y offen ist).
>
> Indem wir zu einer Verfeinerung von U übergehen, können wir also ohne Einschränkung annehmen, dass U eine Überdeckung von $X \times Y$ ist, die nur aus offenen Kästchen besteht. Mit anderen Worten: Bezeichnen wir mit $\pi_X\colon X \times Y \longrightarrow X$ und $\pi_Y\colon X \times Y \longrightarrow Y$ die Projektionen, so gilt für alle $V \in U$, dass $V = \pi_X(V) \times \pi_Y(V)$ und dass $\pi_X(V)$ und $\pi_Y(V)$ in X bzw. Y offen sind.
>
> Da die Projektionen surjektiv sind, sind somit
>
> $$U_X := \bigl\{\pi_X(V) \bigm| V \in U\bigr\} \qquad \text{und} \qquad U_Y := \bigl\{\pi_Y(V) \bigm| V \in U\bigr\}$$
>
> offene Überdeckungen von X bzw. Y. Da X und Y kompakt sind, enthalten diese offenen Überdeckungen jeweils endliche offene Teilüberdeckungen von X bzw. Y. Also gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \dots, V_{n+m} \in U$, so dass
>
> $$X = \bigcup_{j=1}^{n} \pi_X(V_j) \qquad \text{und} \qquad Y = \bigcup_{j=n+1}^{m} \pi_Y(V_j).$$
>
> Dann ist aber $\{V_j = \pi_X(V_j) \times \pi_Y(V_j) | j \in \{1, \dots, n+m\}\} \subset U$ natürlich eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Also ist $X \times Y$ kompakt. □

Hinweis. Obwohl dieser „Beweis" falsch ist stimmt die Behauptung (s. Aufgabe 4).

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Produkte kompakter Räume, II)**.** Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei kompakten topologischen Räumen bezüglich der Produkttopologie kompakt ist, indem Sie wie folgt vorgehen: Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei U eine offene Überdeckung von $X \times Y$ (bezüglich der Produkttopologie).

1. Zeigen Sie, indem Sie die Definition der Produkttopologie und die Kompaktheit von Y verwenden, dass es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $V(x) \subset X$ von x in X mit der Eigenschaft gibt, dass $V(x) \times Y$ durch endlich viele offene Mengen aus U überdeckt wird.

2. Zeigen Sie nun mit Hilfe der Kompaktheit von X, dass es eine endliche Teilmenge $X' \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in X'} V(x).$$

3. Schließen Sie nun, dass U eine endliche offene Teilüberdeckung enthält.

Illustrieren Sie Ihre Beweise jeweils durch geeignete schematische Skizzen!

Bonusaufgabe (Fiskal global)**.** Das neue globalisierte pangalaktische Steuerrecht macht den Besitz von nicht-kompakten Ländereien äußerst unattraktiv. Commander Blorx möchte jedoch dennoch nicht auf den Komfort einer mit Fur-Aces veredelten Residenz verzichten, die ihm das Gefühl unendlicher Weiten verleiht: Das Material Fur-Aces ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^{2011}$.

Kann Commander Blorx seine Residenz so gestalten, dass er den Fängen des Fiskus entgeht?

Mit anderen Worten: Gibt es einen nicht-leeren, kompakten topologischen Raum (X, T) mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung von x in X, die zu $\mathbb{R}^{2011}$ homöomorph ist?

Abgabe bis zum 18. November 2011, 12:00 Uhr, in die Briefkästen