Analysis II im SS 2011 – Kurzskript, Ergänzung

Prof. Dr. C. Löh Wintersemester 2011/12

Satz (Trennung der Variablen)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, seien $h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $(t_0, x_0) \in I \times J$. Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{array}{lll} \textit{Gesucht:} & y \in C^1\bigl(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^1\rangle\bigr) & \textit{mit} \\ & y' = h \cdot (g \circ y) & \\ & y(t_0) = x_0 & \end{array}$$

Dann gilt:

1. *Ist $g(x_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $x_0\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems (im allgemeinen ist diese Lösung jedoch* nicht *eindeutig).*
2. *Ist $g(x_0) \neq 0$, so existieren $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass*

$$\begin{aligned} y\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto G^{-1} \circ H(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} G\colon (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(s)}\, ds, \\ H\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds, \end{aligned}$$

wohldefiniert und eine Lösung des obigen Anfangswertproblems ist.
Ist $\widetilde{y} \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta), \mathbb{R})$ eine Lösung des obigen Anfangswertproblems, so ist $y = \widetilde{y}$.

Beweis. Zu 1. Dies rechnet man leicht nach.
Zu 2. Existenz. Da g stetig und $g(x_0) \neq 0$ ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset J$ und

$$g|_{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} > 0 \quad \text{oder} \quad g|_{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} < 0.$$

Insbesondere ist dann G wohldefiniert. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist G stetig differenzierbar mit $G' = 1/g$; also ist G streng monoton und somit invertierbar, und $G((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$ ist ein offenes Intervall. Da G stetig differenzierbar ist und $G' = 1/g$ keine Nullstellen besitzt, ist auch die Umkehrabbildung G^{-1} stetig differenzierbar.

Da h stetig ist, ist auch H stetig (sogar stetig differenzierbar). Außerdem ist nach Konstruktion $H(t_0) = 0 = G(x_0)$. Also gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$ und

$$H\bigl((t_0 - \delta, t_0 + \delta)\bigr) \subset G\bigl((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\bigr).$$

Somit ist y wohldefiniert und stetig differenzierbar. Nach Konstruktion gilt

$$y(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0,$$

und für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= (G^{-1} \circ H)'(t) \\ &= (G^{-1})'\big(H(t)\big) \cdot H'(t) \\ &= \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t))} \cdot H'(t) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{g(y(t))}} \cdot h(t) \\ &= g\big(y(t)\big) \cdot h(t). \end{aligned}$$

Also ist y eine Lösung des obigen Anfangswertproblems auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Eindeutigkeit. Wir gehen wie im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf vor, d.h. wir verwenden ein Zusammenhangsargument um von lokaler Eindeutigkeit auf Eindeutigkeit auf dem Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ zu schließen:

Sei $\widetilde{y} \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta), \mathbb{R})$ eine Lösung des obigen Anfangswertproblems. Wir betrachten

$$\widetilde{I} := \big\{t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \;\big|\; y(t) = \widetilde{y}(t)\big\}$$

und zeigen, dass $\widetilde{I} = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ist. Da das Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, dass $\widetilde{I}$ nicht-leer und in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ offen und abgeschlossen ist.

- Es ist $\widetilde{I} \neq \emptyset$, denn nach Voraussetzung ist

  $$\widetilde{y}(t_0) = x_0 = y(t_0),$$

  und damit $t_0 \in \widetilde{I}$.
- Es ist $\widetilde{I}$ in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ abgeschlossen, denn

  $$\widetilde{I} = (y - \widetilde{y})|_{(t_0-\delta,t_0+\delta)}^{-1}\big(\{0\}\big)$$

  und $(y - \widetilde{y})|_{(t_0-\delta,t_0+\delta)}$ ist stetig und $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen.
- Es ist $\widetilde{I}$ in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ offen, denn: Sei $t_1 \in \widetilde{I}$. Dann ist

  $$\widetilde{y}(t_1) = y(t_1) = G^{-1}\big(H(t_1)\big) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

  Da $\widetilde{y}$ stetig ist, existiert also ein $\delta_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ und

  $$\widetilde{y}\big((t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)\big) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

  Also ist $G \circ \widetilde{y}|_{(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)}$ definiert und da $\widetilde{y}$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist, erhalten wir für alle $t \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$:

  $$\begin{aligned} (G \circ \widetilde{y})'(t) &= G'\big(\widetilde{y}(t)\big) \cdot \widetilde{y}'(t) \\ &= \frac{1}{g(\widetilde{y}(t))} \cdot h(t) \cdot g\big(\widetilde{y}(t)\big) \\ &= h(t) \\ &= H'(t). \end{aligned}$$

Also ist $(G \circ \widetilde{y} - H)|_{(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)}$ konstant. Wegen

$$(G \circ \widetilde{y} - H)(t_1) = G\bigl(\widetilde{y}(t_1)\bigr) - H(t_1) = G\bigl(y(t_1)\bigr) - H(t_1) = H(t_1) - H(t_1) = 0$$

ist $(G \circ \widetilde{y} - H)|_{(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)} = 0$. Daraus folgt

$$\widetilde{y}|_{(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)} = G^{-1} \circ H|_{(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)} = y|_{(t_1-\delta_1,t_1+\delta_1)}.$$

Somit ist $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1) \subset \widetilde{I}$. Dies zeigt, dass $\widetilde{I}$ in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ offen ist. Also ist $\widetilde{I} = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, womit die Eindeutigkeitsaussage gezeigt ist. $\square$

Caveat. Der Beweis der Eindeutigkeitsaussage im zweiten Teil ist in vielen Büchern inkorrekt!

Version vom 9. Februar 2012
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg