Probeklausur zur Analysis II

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 3. Februar 2012

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	8	10	12	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $f: X \longrightarrow X$ stetig. Ist f dann bereits eine Lipschitz-Abbildung?
2. Sei (X, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum, sei $f: X \longrightarrow X$ eine Isometrie. Hat f dann bereits einen Fixpunkt in X ?
3. Sei (X, T) ein kompakter topologischer Raum und sei $A \subset X$ abgeschlossen. Ist A dann bereits kompakt?
4. Sind alle Hausdorff-Räume zusammenhängend?

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es einen C^1-Diffeomorphismus $\mathbb{R}^{2011} \longrightarrow \mathbb{R}^{2012}$?
2. Gibt es eine differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
$$\forall_{x \in \mathbb{R}^2} \quad Jf(x) = (x_1, 1) \text{ ?}$$
3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Ist dann $f' \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?
4. Ist jede in 0 partiell differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bereits in 0 differenzierbar?

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es reguläre parametrisierte Kurven $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die nicht injektiv sind?
2. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Ist dann $f^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1 ?
3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und sei $x \in S^1$ eine lokale Extremalstelle der Einschränkung $f|_{S^1} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$. Gilt dann bereits $\nabla f(x) = 0$?
4. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_{\{0\}\times[0,1]} e^{\sin(x)\cdot y} \, d\lambda^2(x, y) \ ?$$

Aufgabe 4 ($5 + 1 + 2 = 8$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den Satz über lokale Umkehrbarkeit!
2. Nennen Sie ein Beispiel für einen Satz in der Analysis, der mit Hilfe des Satzes über lokale Umkehrbarkeit bewiesen wird!
3. Geben Sie ein Beispiel für eine Situation, in der der Satz über lokale Umkehrbarkeit anwendbar ist (und erklären Sie, warum die Voraussetzungen erfüllt sind).

Aufgabe 5 $(2+4+4=10$ Punkte$)$**.** Sei

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. Skizzieren Sie M.
2. Zeigen Sie, dass M eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.
3. Bestimmen Sie den Tangentialraum $T^{\mathbb{R}^3}_{(0,0,1)^\top} M \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 6 (4 + 4 + 4 = 12 Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto t^2 \cdot x - t^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:} \quad & y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^1\rangle\big) \quad \text{mit} \\ & y' \quad = \quad f(\,\cdot\,, y) \end{aligned}$$

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld und die Lösungen der obigen Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie alle Lösungen in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der obigen Differentialgleichung.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $t_0 \in I$, sei $f\colon I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz in der zweiten Variablen. Seien $y, \overline{y} \in C^1(I, \mathbb{R})$ Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:} \quad & y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^1\rangle\big) \ \text{ mit} \\ & y' \;=\; f(\,\cdot\,, y) \end{aligned}$$

mit $y(t_0) < \overline{y}(t_0)$. Gilt dann bereits für alle $t \in I$, dass $y(t) < \overline{y}(t)$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!