Probeklausur zur Analysis II

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 3. Februar 2012

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	8	10	12	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $f\colon X \longrightarrow X$ stetig. Ist f dann bereits eine Lipschitz-Abbildung?

2. Sei (X, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum, sei $f\colon X \longrightarrow X$ eine Isometrie. Hat f dann bereits einen Fixpunkt in X ?

3. Sei (X, T) ein kompakter topologischer Raum und sei $A \subset X$ abgeschlossen. Ist A dann bereits kompakt?

4. Sind alle Hausdorff-Räume zusammenhängend?

Lösung:

1. Nein, denn: Man betrachte als Gegenbeispiel etwa die Funktion
$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot}\colon [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$
Diese ist stetig; aber diese Funktion ist nicht Lipschitz, denn: Sei $L \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in (0,1]$ mit $t < 1/L^2$. Dann ist
$$\bigl|\sqrt{t} - \sqrt{0}\bigr| = \sqrt{t} > L \cdot t = L \cdot |t - 0|.$$

2. Nein, denn: Man betrachte etwa die Isometrie (die keine Fixpunkte besitzt, obwohl $\mathbb{R}$ ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum ist)
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1. \end{aligned}$$
[Alternativ kann man zum Beispiel auch auf $\{0, 1\}$ mit der diskreten Metrik die Abbildung betrachten, die 0 und 1 vertauscht.]

3. Ja, nach einem Satz aus der Vorlesung (Proposition 2.34). Kurze Zusammenfassung das Arguments: Man kann jede offene Überdeckung von A zu einer von X erweitern, indem man die offenen Mengen geeignet vergrößert und $X \setminus A$ hinzufügt. Da X kompakt ist, enthält diese offene Überdeckung von X eine endliche offene Teilüberdeckung von X. Daraus gewinnt man dann die gewünschte endliche offene Teilüberdeckung von A in der ursprünglichen offenen Überdeckung von A.

4. Nein, denn: Beispielsweise ist der Raum $[0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie hausdorffsch, aber nicht zusammenhängend.

   [Alternativ kann man zum Beispiel auch $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie betrachten.]

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es einen C^1-Diffeomorphismus $\mathbb{R}^{2011} \longrightarrow \mathbb{R}^{2012}$?
2. Gibt es eine differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
$$\forall_{x\in\mathbb{R}^2} \quad Jf(x) = (x_1, 1)\ ?$$
3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Ist dann $f' \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?
4. Ist jede in 0 partiell differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bereits in 0 differenzierbar?

Lösung:

1. Nein, dies ist nach der Invarianz der Dimension unter C^1-Diffeomorphismen nicht möglich. Zusammenfassung des Arguments:

   Angenommen, es gibt einen C^1-Diffeomorphismus $f\colon \mathbb{R}^{2011} \longrightarrow \mathbb{R}^{2012}$. Sei $g\colon \mathbb{R}^{2012} \longrightarrow \mathbb{R}^{2011}$ die Umkehrabbildung von f (diese ist auch stetig differenzierbar). Mit der Kettenregel folgt dann, dass $f'(0)\colon \mathbb{R}^{2011} \longrightarrow \mathbb{R}^{2012}$ und $g'(f(0))\colon \mathbb{R}^{2012} \longrightarrow \mathbb{R}^{2011}$ zueinander inverse lineare Isomorphismen sind. Also ist $2011 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2011} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2012} = 2012$, was nicht sein kann.

2. Ja, etwa die Funktion
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} \cdot x_1^2 + x_2 \end{aligned}$$
   (wie man leicht mithilfe der partiellen Ableitungen nachrechnet).

3. Nein, denn: Die Ableitung f' ist nach Definition eine (i.a. nicht-lineare) Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

4. Nein, denn: Die Funktion
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$
   ist in 0 partiell differenzierbar (da sie auf den Koordinatenachsen konstant 0 ist), aber nicht in 0 differenzierbar, da sie in 0 nicht stetig ist.

   [Alternativ kann man z.B. auch die Abbildung aus Aufgabe 2 von Blatt 6 betrachten.]

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es reguläre parametrisierte Kurven $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die nicht injektiv sind?
2. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Ist dann $f^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1 ?
3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und sei $x \in S^1$ eine lokale Extremalstelle der Einschränkung $f|_{S^1} \colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$. Gilt dann bereits $\nabla f(x) = 0$?
4. Was ist der Wert des Integrals
$$\int_{\{0\}\times[0,1]} e^{\sin(x)\cdot y}\, d\lambda^2(x,y) \;?$$

Lösung:

1. Ja, denn: Es ist
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin t, \cos t)^\top \end{aligned}$$
eine reguläre parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$, die nicht injektiv ist.
2. Nein, denn: Sei zum Beispiel $f := 0 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f stetig differenzierbar und $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^2$ und mit der Invarianz der Dimension folgt, dass $f^{-1}(\{0\})$ keine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit ist.

   [Alternativ kann man zum Beispiel auch $\|\cdot\|_2^2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Weitere Alternative: Für die folgende Funktion ist das Urbild von 0 noch nicht einmal eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_1 \cdot x_2 .] \end{aligned}$$
3. Nein, denn: Man betrachte etwa die Funktion
$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_1 . \end{aligned}$$
Dann ist ∇f konstant gleich $(1,0)^\top \neq 0$, aber f nimmt als stetige Funktion auf der kompakten Menge S^1 ein Maximum an [in $(1,0)^\top$].
4. Das Integral ist 0, denn: Die Menge $\{0\} \times [0,1]$ hat nach Definition des Lebesgue-Maßes Lebesgue-Maß 0. Das Integral einer Lebesgue-integrierbaren Funktion über dieser Menge ist daher stets 0.

Aufgabe 4 (5 + 1 + 2 = 8 Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den Satz über lokale Umkehrbarkeit!
2. Nennen Sie ein Beispiel für einen Satz in der Analysis, der mit Hilfe des Satzes über lokale Umkehrbarkeit bewiesen wird!
3. Geben Sie ein Beispiel für eine Situation, in der der Satz über lokale Umkehrbarkeit anwendbar ist (und erklären Sie, warum die Voraussetzungen erfüllt sind).

Lösung:

1. *Satz über lokale Umkehrbarkeit:* Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$, sei $x \in X$ und sei $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar (d.h. $\det Jf(x) \neq 0$). Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Die Einschränkung $f|_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv.
   (b) Die Menge $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.
   (c) Die Umkehrabbildung $(f|_U)^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ ist stetig differenzierbar.

   D.h. $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.
2. Beispielsweise der Satz über implizite Funktionen.
3. Man betrachte etwa die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ [oder in jeder anderen Dimension]. Diese Funktion ist stetig differenzierbar und ihre Jacobi-Matrix ist in jedem Punkt die Identität, also invertierbar, also lässt sich der Satz über lokale Umkehrbarkeit in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$ anwenden [die Funktion ist natürlich sogar global umkehrbar].

   [Etwas „interessantere“ Alternative: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{falls } x_2 > 0 \\ -x & \text{falls } x_2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   ist natürlich nicht invertierbar, erfüllt aber die Voraussetzungen des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit in jedem Punkt.]

Aufgabe 5 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)**.** Sei

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. Skizzieren Sie M.
2. Zeigen Sie, dass M eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.
3. Bestimmen Sie den Tangentialraum $T^{\mathbb{R}^3}_{(0,0,1)^\top} M \subset \mathbb{R}^3$.

Lösung:

1. Siehe Abbildung 1.

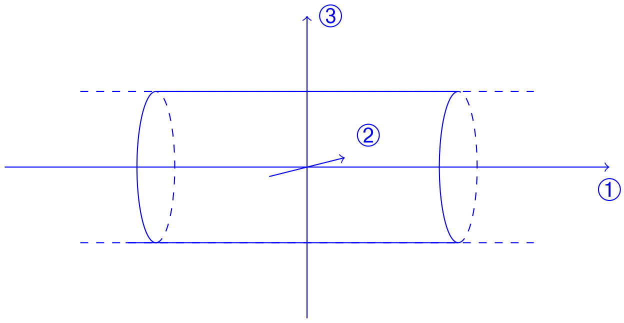

Abbildung 1: Die Untermannigfaltigkeit M

2. Wir benutzen den Satz vom regulären Wert: Dazu betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_2^2 + x_3^2 - 1. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ erhält man $Jf(x) = (0, 2 \cdot x_2, 2 \cdot x_3)$ und diese Matrix hat Rang 1 für alle $x \in M = f^{-1}(\{0\})$. Also ist 0 ein regulärer Wert und $M = f^{-1}(\{0\})$ daher eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

3. Es gilt

$$T^{\mathbb{R}^3}_{(0,0,1)^\top} M = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

denn: Der Tangentialraum von M ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ (Blatt 11). Es genügt also zu zeigen, dass die beiden linear unabhängigen Vektoren $(1,0,0)^\top$ und $(0,1,0)^\top$ in $T^{\mathbb{R}^3}_{(0,0,1)^\top} M$ liegen:

- Wir betrachten die stetig differenzierbare parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t, 0, 1)^\top. \end{aligned}$$

  Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{R}) &\subset M, \\ \varphi(0) &= (0, 0, 1)^\top, \\ \varphi'(0) &= (1, 0, 0)^\top. \end{aligned}$$

  Also ist $(1, 0, 0)^\top \in T^{\mathbb{R}^3}_{(0,0,1)^\top} M$.

- Wir betrachten die stetig differenzierbare parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (0, \sin t, \cos t)^\top. \end{aligned}$$

  Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi(\mathbb{R}) &\subset M, \\ \psi(0) &= (0, 0, 1)^\top, \\ \psi'(0) &= (0, 1, 0)^\top. \end{aligned}$$

  Also ist $(0, 1, 0)^\top \in T^{\mathbb{R}^3}_{(0,0,1)^\top} M$.

Aufgabe 6 $(4+4+4=12$ Punkte$)$**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto t^2\cdot x - t^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:}\quad & y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^1\rangle\big) \;\text{ mit} \\ y' \;&=\; f(\,\cdot\,,y) \end{aligned}$$

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld und die Lösungen der obigen Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen in $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie alle Lösungen in $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der obigen Differentialgleichung.

Lösung:

1. Siehe Abbildung 1.
2. Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist

   $$\begin{aligned} \text{Gesucht:}\quad & y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^1\rangle\big) \;\text{ mit} \\ y' \;&=\; \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2\cdot y. \end{aligned}$$

   Wir können direkt eine Fundamentallösung ablesen, nämlich zum Beispiel die Funktion

   $$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{\frac{1}{3}\cdot t^3} \end{aligned}$$

   (diese ist offensichtlich stetig differenzierbar, erfüllt die homogene Differentialgleichung und $y(0)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}$). Damit erhalten wir als Lösungsraum in $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge $\big\{(t\mapsto a\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot t^3}) \bigm| a\in\mathbb{R}\big\} \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   [Wenn man die Fundamentallösung nicht direkt sieht kann man die Lösungen auch mittels getrennter Variablen bestimmen. Mit den Bezeichnungen der Vorlesung erhält man dann $G^{-1} = a\cdot\exp$ und $H = 1/3\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3$ für einen Anfangswert $a\in\mathbb{R}$ in 0. Man überlege sich dann, dass diese Lösungen global (d.h. auf $\mathbb{R}$) existieren.]

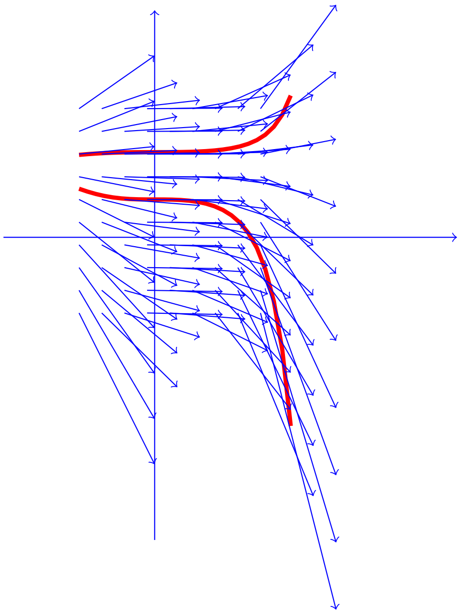

Abbildung 2: Richtungsfeld der Differentialgleichung und zwei mögliche Lösungen

3. Man sieht direkt, dass die konstante 1-Funktion eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und erhält daher als Lösungsraum in $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge $\left\{(t \mapsto a \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot t^3} + 1) \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\} \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   [Alternativ bestimme man die Lösungen mittels Variation der Konstanten: Man erhält nach diesem Verfahren als Lösungskandidaten die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot \int_0^t e^{-\frac{1}{3}\cdot s^3} \cdot (-s^2)\, ds = e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot \left[e^{-\frac{1}{3}s^3} \cdot \right]_{s=0}^{s=t} = 1 - e^{\frac{1}{3}t^3} \end{aligned}$$

   und damit ebenso obigen Lösungsraum.]

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $t_0 \in I$, sei $f \colon I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz in der zweiten Variablen. Seien $y, \overline{y} \in C^1(I, \mathbb{R})$ Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:} \quad & y \in C^1\big(\langle \mathbb{R}^1 \rangle, \langle \mathbb{R}^1 \rangle\big) \;\; \text{mit} \\ & y' \;\; = \;\; f(\,\cdot\,, y) \end{aligned}$$

mit $y(t_0) < \overline{y}(t_0)$. Gilt dann bereits für alle $t \in I$, dass $y(t) < \overline{y}(t)$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: Angenommen, es gäbe ein $t_1 \in I$ mit $\overline{y}(t_1) < y(t_1)$. Die Funktion

$$y - \overline{y} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist stetig, also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $t_2 \in I$ mit $y(t_2) = \overline{y}(t_2)$. Dann sind y und $\overline{y}$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:} \quad & z \in C^1\big(\langle \mathbb{R}^1 \rangle, \langle \mathbb{R}^1 \rangle\big) \;\; \text{mit} \\ & z' \;\; = \;\; f(\,\cdot\,, z) \\ & z(t_2) \;\; = \;\; y(t_2) \end{aligned}$$

in $C^1(I, \mathbb{R})$. Wegen $y(t_0) \neq \overline{y}(t_0)$ ist $y \neq \overline{y}$.

Andererseits ist in der gegebenen Situation der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar. Daher kann es höchstens eine Lösung in $C^1(I, \mathbb{R})$ dieses Anfangswertproblems geben, im Widerspruch zu $y \neq \overline{y}$.

Also gilt für alle $t \in I$, dass $y(t) < \overline{y}(t)$ ist.