Wiederholungsklausur zur Analysis II

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — 11. April 2012

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	8	10	12	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (X, d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum. Ist dann jede Abbildung $f\colon X \longrightarrow X$, die einen Fixpunkt in X besitzt, kontrahierend?

2. Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist dann $f^{-1}(A)$ für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset Y$ abgeschlossen in X ?

3. Sind alle offenen Teilmengen von zusammenhängenden topologischen Räumen zusammenhängend (bezüglich der Teilraumtopologie)?

4. Sind alle Hausdorff-Räume kompakt?

Lösung:

1. Nein, denn: Die Funktion

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2 \cdot x \end{aligned}$$

   besitzt einen Fixpunkt ohne kontrahierend zu sein.

   [Es gibt hier sehr viele weitere Gegenbeispiele, etwa $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.]

2. Ja, denn: Ist $A \subset Y$ abgeschlossen in Y, so ist $Y \setminus A$ offen in Y. Da f stetig ist, ist also $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A) \subset X$ offen in X und daher $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen in X.

3. Nein, denn: Man betrachte etwa die Menge $(0, 1) \cup (2, 3)$ als Teilmenge des zusammenhängenden topologischen Raumes $\mathbb{R}$.

   [Es gibt hier viele weitere Beispiele].

4. Nein, denn: Man betrachte etwa $\mathbb{R}$ mit der diskreten bzw. mit der Standardtopologie.

   [Auch hier sind viele weitere Gegenbeispiele möglich].

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es einen C^1-Diffeomorphismus $f\colon \mathbb{R}^{2011} \longrightarrow \mathbb{R}^{2011}$ mit der Eigenschaft, dass $\det Jf(x) = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2011}$ gilt?

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Gilt dann für alle $h \in \mathbb{R}^4$, dass $f''(0)(h, 4 \cdot h) = f''(0)(2 \cdot h, 2 \cdot h)$ ist?

3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^{11}, \mathbb{R}^{11})$ und $\det Jf(0) = 2012$. Gibt es dann ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(f(0), \varepsilon) \subset f(\mathbb{R}^{11})$?

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit $\partial_1 f = 0$. Gilt dann bereits $f((0,0)^\top) = f((1,0)^\top)$?

Lösung:

1. Nein, denn: Ist $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus, so ist die Matrix $Jf(x)$ in jedem $x \in \mathbb{R}^{2011}$ invertierbar, insbesondere gibt es keinen Diffeomorphismus $f\colon \mathbb{R}^{2011} \longrightarrow \mathbb{R}^{2011}$ mit $\det Jf(0) = \|0\|_2 = 0$.

2. Ja, denn: Die Abbildung $f''(0)$ ist bilinear, daher gilt für alle $h \in \mathbb{R}^4$, dass $f''(0)(h, 4 \cdot h) = 4 \cdot f(0)''(h, h) = f''(0)(2 \cdot h, 2 \cdot h)$.

3. Ja, denn: Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit gibt es eine (offene) Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{11}$ von 0 derart, dass $f(U)$ offen ist. Insbesondere existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(f(0), \varepsilon) \subset f(U) \subset f(\mathbb{R}^{11})$.

4. Ja, denn: Die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f((t,0)^\top) \end{aligned}$$

ist nach Voraussetzung differenzierbar und erfüllt $g' = 0$. Die Funktion g ist daher konstant (nach dem Mittelwertsatz in Dimension 1), insbesondere gilt $f((0,0)^\top) = f((1,0)^\top)$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gibt es ein $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $\Delta f = 1$?
2. Ist $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \cdot x_3 = 1 + x_1\}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?
3. Besitzt jede stetig differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ höchstens endlich viele lokale Extremalstellen?
4. Was ist der Wert des Integrals
$$\int_{[-1,1]\times[0,1]} \sin(x \cdot y^2) \cdot y \, d\lambda^2(x,y) \ ?$$

Lösung:

1. Ja, zum Beispiel die Funktion $x \longmapsto 1/2 \cdot x_1^2$.
2. Ja, denn: Die Funktion
$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_2 \cdot x_3 - x_1 - 1 \end{aligned}$$
ist eine C^1-Funktion und für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $J\varphi(x) = (-1, x_3, x_2) \neq 0$, insbesondere ist 0 ein regulärer Wert dieser Funktion. Die Aussage folgt daher aus dem Satz über reguläre Werte.
3. Nein, denn: Beispielsweise hat die Funktion $(\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto 0)$ unendlich viele lokale Extremstellen.

   [alternatives Beispiel: die Funktion $(\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \sin(x_1) + \sin(x_2))$, oder $\sin(x_1) \cdot \cos(x_2)$ oder $\sin(x_1)$ etc.]
4. Die Funktion $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \sin(x \cdot y^2) \cdot y$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Fubini und wir erhalten:
$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]\times[0,1]} \sin(x \cdot y^2) \cdot y \, d\lambda^2(x,y) &= \int_{[0,1]} \underbrace{\int_{[-1,1]} \sin(x \cdot y^2) \cdot y \, d\lambda^1(x)}_{=0, \text{ da sin eine ungerade Funktion ist}} \, d\lambda^1(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

   [Alternativ kann man das Integral auch von Hand ausrechnen.]

Aufgabe 4 ($5 + 1 + 2 = 8$ Punkte).

1. Formulieren Sie den Satz von Picard-Lindelöf!
2. Auf welchem Satz beruht der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf?
3. Geben Sie ein Beispiel für eine Situation, in der der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist (und erklären Sie, warum die Voraussetzungen erfüllt sind).

Lösung:

1. *Der Satz von Picard-Lindelöf.* Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t_0, x_0) \in D$ und sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in den letzten n Variablen. Wir betrachten die folgende Differentialgleichung (ein sogenanntes *Anfangswertproblem*):

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:} \quad & y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^n\rangle\big) \text{ mit} \\ & y' = f(\,\cdot\,, y) \\ & y(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

   Dann gilt:

   (a) *Lokale Existenz.* Es existiert ein $\delta_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass dieses Anfangswertproblem eine Lösung in $C^1([t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0], \mathbb{R}^n)$ besitzt.

   (b) *Eindeutigkeit.* Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ und sind $y, \overline{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ Lösungen des obigen Anfangswertproblems, so ist $y = \overline{y}$.

   [+1 Extrapunkt für eine Definition von *lokal lipschitz in den letzten n Variablen*: Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist f *lokal Lipschitz in den letzten n Variablen*, wenn: Für alle $(t_0, x_0) \in D$ (mit $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$) gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 mit $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times U \subset D$, und ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\forall_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \quad \forall_{x, \overline{x} \in U} \quad \big\| f(t, x) - f(t, \overline{x}) \big\|_2 \leq L \cdot \|x - \overline{x}\|_2. \,]$$

2. Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz.

3. Der Satz von Picard-Lindelöf lässt sich insbesondere auf lineare Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten anwenden, da die beschreibenden Funktionen als lineare Funktionen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen in diesem Fall Lipschitz-stetig sind (insbesondere stetig und lokal Lipschitz in den letzten Variablen). Ein konkretes Beispiel ist etwa durch die Fragestellung aus Aufgabe 6 gegeben.

   [Alternativ: Man betrachte das Anfangswertporblem

   $$\begin{array}{ll} \text{Gesucht:} & y \in C^1\big(\langle \mathbb{R}^1 \rangle, \langle \mathbb{R}^1 \rangle\big) \ \text{ mit} \\ & \begin{array}{lcl} y' & = & 0 = f(\cdot, y) \text{ und} \\ y(0) & = & 0 \end{array} \end{array}$$

   wobei

   $$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

   offensichtlich lokal lipschitz in der letzten Variablen und stetig ist.]

Aufgabe 5 $(2+4+4=10$ Punkte$)$**.** Sei

$$\begin{aligned}\gamma\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto \begin{pmatrix}\cos(2\cdot e^t)\\ 1-\sin(2\cdot e^t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Skizzieren Sie das Bild von γ.
2. Zeigen Sie, dass γ eine reguläre parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist und bestimmen Sie eine zu γ äquivalente nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$.
3. Sei

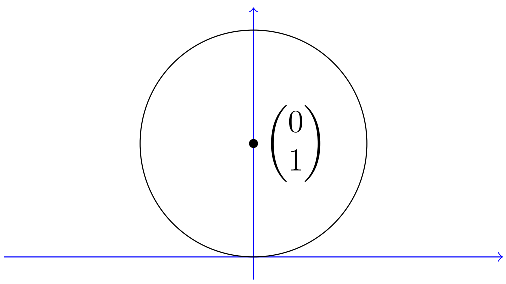
$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \ln(x_1^2+(1-x_2)^2+1).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung:

1. Skizze siehe Abbildung 1

Abbildung 1: Bild von γ in $\mathbb{R}^2$



2. Die Kurve γ ist stetig differenzierbar und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\|\gamma'(t)\|_2^2 = \left\|\begin{pmatrix}-2\cdot e^t\cdot\sin(2\cdot e^t)\\ -2\cdot e^t\cdot\cos(2\cdot e^t)\end{pmatrix}\right\|_2^2 = 2\cdot e^t \neq 0,$$

also ist γ regulär parametrisiert. Die Kurve

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1-\sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist offensichtlich regulär, nach Bogenlänge parametrisiert und zu γ äquivalent (eine Umparametrisierung ist durch den C^1-Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ t &\longmapsto 2 \cdot e^t \end{aligned}$$

gegeben).

3. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\gamma(t)) = \ln\bigl(\cos^2(2 \cdot e^t) + \sin^2(2 \cdot e^t) + 1\bigr) = \ln(2).$$

Also gilt $\gamma(\mathbb{R}) \subset f^{-1}(\ln(2))$, d.h. γ bildet in eine Niveaumenge von f ab. Der Gradient der differenzierbaren Funktion f ist orthogonal zu den Niveaulinien von f, also gilt die Behauptung.

[Alternativ kann man von Hand nachrechnen, dass die behauptete Gleichung gilt.]

Aufgabe 6 $(4+4+4=12$ Punkte$)$**.** Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1-x_1 \\ x_2+x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \text{Gesucht:}\quad & y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^2\rangle\big) \quad \text{mit} \\ & y' \quad = f \circ y. \end{aligned}$$

1. Skizzieren Sie die Phasenebene und darin die Lösungen dieser Differentialgleichung, und bestimmen Sie alle stationären Punkte dieser Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie alle Lösungen $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ der obigen Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

Lösung:

1. Es gibt offensichtlich genau einen stationären Punkt, nämlich $(1, -1)^\top$. Skizze siehe Abbildung 2.
2. Die Differentialgleichung lässt sich schreiben als

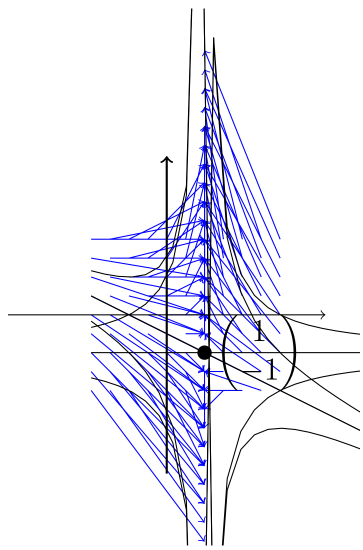
$$\begin{aligned} \text{Gesucht:}\quad & y \in C^1\big(\langle\mathbb{R}^1\rangle, \langle\mathbb{R}^2\rangle\big) \quad \text{mit} \\ & y' \quad = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \cdot y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix A lässt sich über $\mathbb{R}$ (nach kurzer Rechnung) wie folgt diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 2: Phasenebene mit stationärem Punkt und einigen Lösungen

.



Damit erhalten wir als (eine) Fundamentalmatrix der homogenen linearen Differentialgleichung die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}^{2\times 2}\\ t &\longmapsto \exp(t\cdot A) = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot \exp\left(t\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 1/2\cdot(e^{t}-e^{-t}) & e^{t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Der Lösungsraum ist also gegeben durch die Menge

$$\left\{\begin{pmatrix}a\cdot\exp\circ(-\operatorname{id}_{\mathbb{R}})\\ -\frac{a}{2}\cdot\exp\circ(-\operatorname{id}_{\mathbb{R}})+b\cdot\exp\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

[Alternativ: Man kann auch die Lösungen raten und geeignet argumentieren, dass dies die einzigen sind (etwa über die Form der Lösüngen von linearen Differentialgleichungen etc.).

Alternativ: Man kann auch erst die Differentialgleichung in der ersten Komponente lösen und damit die Differentialgleichung in der zweiten Komponente bestimmen und lösen.]

3. An der inhomogenen Differentialgleichung (oder der Skizze aus Teil 1) kann man direkt eine Lösung ablesen, nämlich die konstante Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhält man als Lösungsraum der inhomogenen Differentialgleichung die Menge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 + a \cdot \exp \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{R}}) \\ -1 - \frac{a}{2} \cdot \exp \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{R}}) + b \cdot \exp \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die einzige Lösung $\varphi \in L$ mit $\varphi(0) = 0$ ist also die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ -1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[Alternativ: Man kann die Lösung auch mittels Variation der Konstanten bestimmen.

Alternativ: Man kann die Lösung auch raten und mittels Picard-Lindelöf die Eindeutigkeit begründen].

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte nichtleere C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in M$ mit

$$T_x^{\mathbb{R}^n} M = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

gibt.

Hinweis. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_n. \end{aligned}$$

Lösung: Man betrachte die differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} p_n \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_n. \end{aligned}$$

Da M kompakt ist, nimmt p_n auf M ein Maximum [alternativ: Minimum] in einem Punkt $x \in M$ an. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$. Dann ist $p_n \circ \gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in 0 ein Maximum annimmt, also gilt $(p_n \circ \gamma)'(0) = 0$ und damit

$$0 = (p_n \circ \gamma)'(0) = p_n'(\gamma(0)) \circ \gamma'(0)_n = p_n \circ \gamma'(0) = \gamma'(0)_n.$$

Daher folgt $T_x^{\mathbb{R}^n} M \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Die gewünschte Gleichheit folgt aus Dimensionsgründen, da $T_x^{\mathbb{R}^n} \subset \mathbb{R}^n$ ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum ist (da M eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist).