Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 1 vom 13. April 2018

Aufgabe 1 (kleine Kategorien). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gibt eine Kategorie mit genau 2018 Objekten.
2. Ist X ein Objekt in einer Kategorie C mit $|\mathrm{Mor}_C(X,X)| = 2018$, so ist jeder Morphismus in $\mathrm{Mor}_C(X,X)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2 (Isomorphie). Sei C eine Kategorie und $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$.

1. Zeigen Sie: Gilt $X \cong_C Y$, so folgt $Y \cong_C X$.
2. Zeigen Sie: Gilt $X \cong_C Y$ und $Y \cong_C Z$, so folgt $X \cong_C Z$.

Aufgabe 3 (Gruppenkategorien). Seien G und H Gruppen. Wie kann man Funktoren $C_G \longrightarrow C_H$ gruppentheoretisch beschreiben? Formulieren Sie eine geeignete Behauptung und beweisen Sie diese!

Aufgabe 4 (Kern). Sei C eine Kategorie, die ein Nullobjekt N besitzt (s. Aufgabe 4 von Blatt 0). Sind $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, so schreiben wir $n_{X,Y} \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ für die Komposition der eindeutigen Morphismen in $\mathrm{Mor}_C(N,Y)$ und $\mathrm{Mor}_C(X,N)$. Sind $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$, so ist ein Paar (K,k), bestehend aus einem Objekt $K \in \mathrm{Ob}(C)$ und einem Morphismus $k \in \mathrm{Mor}_C(K,X)$, ein *Kern von f in C*, wenn $f \circ k = n_{K,Y}$ und folgendes gilt: Für jedes Objekt $K' \in \mathrm{Ob}(C)$ und jeden Morphismus $k' \in \mathrm{Mor}_C(K',X)$ mit $f \circ k' = n_{K',Y}$ gibt es genau einen Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_C(K',K)$ mit $k \circ g = k'$.

1. Illustrieren Sie diesen Begriff durch ein geeignetes Diagramm!
2. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass jeder Morphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ einen Kern im obigen Sinne besitzt.
3. Zeigen Sie: Falls ein Morphismus in einer Kategorie einen Kern im obigen Sinne besitzt, so ist dieser Kern „im wesentlichen" eindeutig bestimmt.

Bonusaufgabe (Gruppoide).

1. Wie sind Gruppoide (via Kategorien) und Gruppoidmorphismen definiert?
2. Was ist der Zusammenhang zu Gruppen und Gruppenhomomorphismen?

Hinweis. Vergessen Sie nicht, alle verwendeten Quellen zu zitieren!

Abgabe bis zum 20. April 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen