Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 11 vom 22. Juni 2018

Aufgabe 1 (artinsche Ringe)**.** Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $\dim R \leq 2018$, so ist R artinsch.
2. Ist $R[T]$ artinsch, so ist R artinsch.

Aufgabe 2 (Primärzerlegung, geometrisch)**.** Bestimmen Sie eine minimale Primärzerlegung von $(Y - X^2, Y + X)$ in $\mathbb{C}[X, Y]$.
Hinweis. Denken Sie geometrisch! Und beweisen Sie dann algebraisch.

Aufgabe 3 (maximale Radikale)**.**

1. Sei R ein Ring und a ein Ideal. Zeigen Sie: Ist $\sqrt{a}$ ein maximales Ideal in R, so ist a bereits ein primäres Ideal in R.
2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass

   $$(X^2, X\cdot Y) = (X)\cap(X^2, X\cdot Y, Y) \quad \text{und} \quad (X^2, X\cdot Y) = (X)\cap(X^2, X\cdot Y, Y^2)$$

   minimale Primärzerlegungen von $(X^2, X \cdot Y)$ in $K[X, Y]$ sind.

Aufgabe 4 (nilpotente Nilradikale)**.** Sei R ein Ring. Ein Ideal $a \subset R$ ist *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a^n = (0)$ gibt.

1. Zeigen Sie: Ist R noethersch, so ist das Nilradikal $\sqrt[R]{0}$ nilpotent.

   Hinweis. Das Nilradikal ist endlich erzeugt. Was passiert daher in hohen Potenzen von $\sqrt[R]{0}$?
2. Zeigen Sie: Ist R artinsch, so ist das Nilradikal $\sqrt[R]{0}$ nilpotent.

   Hinweis. Sei $a := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_{>0}} (\sqrt[R]{0})^n$. Warum genügt es zu zeigen, dass $a = (0)$ ist? Nehmen Sie an, a wäre nicht das Nullideal und betrachten Sie dann die Menge M aller Ideale $b \subset R$ mit $a \cdot b \neq (0)$. Warum besitzt M ein bezüglich Inklusion minimales Element b ? Warum ist b von einem Element erzeugt? Was passiert mit diesem Element?

Bonusaufgabe (Gröbner-Basen)**.** Lesen Sie Anhang A.3 über Gröbner-Basen.

1. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Buchberger eine Gröbner-Basis des Ideals

   $$a := (X^3 - 2 \cdot X \cdot Y,\ X^2 \cdot Y - 2 \cdot Y^2 + X) \subset \mathbb{C}[X, Y]$$

   in $\mathbb{C}[X, Y]$.
2. Entscheiden Sie mithilfe dieser Gröbner-Basis, ob die folgenden Polynome in a liegen oder nicht:

   $$X^{2018} + 2018 \cdot X \cdot Y, \quad X^{2018} + Y^{2017}.$$

Abgabe bis zum 29. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen