Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 4 vom 4. Mai 2018

Aufgabe 1 (induzierte Abbildungen und Spec)**.** Seien R und S Ringe und sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort! (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist f surjektiv, so ist auch $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ surjektiv.
2. Ist f injektiv, so ist auch $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ injektiv.

Aufgabe 2 (zwei Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{R}[X,Y]/(Y - X^2, Y + X)$.

1. Zeigen Sie, dass $R \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

   Hinweis. Eliminieren Sie zunächst eine Variable und wenden Sie dann den Chinesischen Restsatz an.
2. Folgern Sie, dass $\operatorname{Spec} R$ genau zwei Elemente enthält. Beschreiben Sie diese beiden Primideale in R auf möglichst einfache Weise.

Aufgabe 3 (Zariski-Topologie)**.** Sei R ein Ring. Ist $a \subset R$, so schreiben wir

$$V_R(a) := \{p \in \operatorname{Spec} R \mid a \subset p\} \subset \operatorname{Spec} R.$$

1. Zeigen Sie: Es gibt $a, b \subset R$ mit $V_R(a) = \emptyset$ und $V_R(b) = \operatorname{Spec} R$.
2. Zeigen Sie: Ist $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von R, so gilt
   $$\bigcap_{i \in I} V_R(a_i) = V_R\biggl(\bigcup_{i \in I} a_i\biggr).$$
3. Zeigen Sie: Sind $a, b \subset R$, so gilt $V_R(a) \cup V_R(b) = V_R\bigl(\{x \cdot y \mid x \in a, y \in b\}\bigr)$.

Aufgabe 4 (Nilradikal)**.** Sei R ein Ring. Das *Nilradikal von R* ist definiert als

$$N(R) := \{x \in R \mid \exists_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \quad x^n = 0\} \subset R.$$

1. Zeigen Sie, dass $N(R)$ ein Ideal in R ist.
2. Zeigen Sie, dass $N\bigl(\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)\bigr)$ *kein* Primideal in $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass $N(R) \subset \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p$.
4. Zeigen Sie, dass $N(R) \supset \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p$.

   Hinweis. Zornsches Lemma!

Bonusaufgabe (Topologie via Algebra)**.** Sei X ein topologischer Hausdorffraum (z.B. $X = [0,1]$) und sei

$$\begin{aligned} \mu\colon X &\longrightarrow \operatorname{mSpec} C(X, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \bigl\{f \in C(X,\mathbb{R}) \bigm| f(x) = 0\bigr\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Eine Teilmenge $V \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn es ein Ideal $a \subset C(X,\mathbb{R})$ mit $\mu(V) = V_{C(X,\mathbb{R})}(a) \cap \operatorname{mSpec} C(X,\mathbb{R})$ (Aufgabe 3) gibt.
Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie nur den Spezialfall $X = [0,1]$ behandeln. Die Mengen $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ mit $f \in C(X,\mathbb{R})$ bilden eine Basis der Topologie auf X.

Abgabe bis zum 11. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen