Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 6 vom 18. Mai 2018

Aufgabe 1 (Dimension, algebraisch)**.** Seien R und S Ringe und sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ injektiv, so ist $\dim R \leq \dim S$.
2. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ surjektiv, so ist $\dim R \geq \dim S$.

Aufgabe 2 (Dimension, geometrisch)**.** Sei $f := Y^2 - X^3 - X^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}^3$.
2. Zeigen Sie, dass das Polynom f in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ prim ist.

   Hinweis. Sie dürfen natürlich verwenden, dass $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ faktoriell ist.
3. Bestimmen Sie die Dimension des Koordinatenrings $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$.

Aufgabe 3 (Dimension von $\mathbb{Z}$, anders)**.** Zeigen Sie durch elementare Zahlentheorie (ohne das Kriterium von Coquand und Lombardi zu verwenden):

$$\forall_{x_0,x_1\in\mathbb{Z}} \quad \exists_{k_0,k_1\in\mathbb{N}} \quad \exists_{y_0,y_1\in\mathbb{Z}} \quad x_0^{k_0} \cdot \bigl(x_1^{k_1} \cdot (1 + x_1 \cdot y_1) + x_0 \cdot y_0\bigr) = 0.$$

Aufgabe 4 (die p-adischen ganzen Zahlen)**.** Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim und sei

$$\mathbb{Z}_{[\![p]\!]} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n)$$

der *Ring der p-adischen ganzen Zahlen*. Der inverse Limes wird dabei über das inverse System $(\pi_{n,k}\colon \mathbb{Z}/(p^n) \to \mathbb{Z}/(p^k))_{n,k\in\mathbb{N}_{>0},k\leq n}$ der kanonischen Projektionen gebildet; zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\pi_n\colon \mathbb{Z}_{[\![p]\!]} \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$ die zugehörige Strukturabbildung des inversen Limes.

1. Sei $m := \ker \pi_1$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}/m \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(p)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]} \setminus m$ in $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ invertierbar ist.

   Hinweis. Betrachten Sie das konkrete Modell von $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ als Teilring des Produkts $\prod_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n)$ und konstruieren Sie das multiplikative Inverse induktiv (ähnlich zu Aufgabe 3 von Blatt 2).
3. Wieviele maximale Ideale besitzt also $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$?

Bonusaufgabe (1+1=3)**.** Sei K ein Körper, sei $A := K(X) = Q(K[X])$ der rationale Funktionenkörper über K und sei $\widetilde{R} := A[\![Y]\!]$ der formale Potenzreihenring über A. Ist $f \in \widetilde{R}$, so schreiben wir kurz $f(0)$ für den Koeffizienten (in $K(X)$) von Y^0 in f. Sei $R := \bigl\{f \in \widetilde{R} \bigm| f(0) \in K\bigr\}$.

1. Zeigen Sie, dass $m := \bigl\{f \in R \bigm| f(0) = 0\bigr\}$ ein maximales Ideal in R ist.
2. Zeigen Sie, dass m das einzige nicht-triviale Primideal von R ist.
3. Sei $p := \bigl\{g \in R[T] \bigm| g(X) = 0 \text{ (in } R)\bigr\}$. Zeigen Sie, dass p ein Primideal in $R[T]$ ist, das $0 \subsetneq p \subsetneq m[T]$ erfüllt.
4. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$ und $\dim R[T] = 3$ ist.

Abgabe bis zum 25. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen