Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 7 vom 25. Mai 2018

Aufgabe 1 (Verschwindungskriterium?). Sei R ein Integritätsring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $S^{-1}R$ der Nullring, so ist $0 \in S$.
2. Ist $S^{-1}R$ nicht der Nullring, so ist $0 \notin S$.

Aufgabe 2 (Glattheitskriterium). Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2)$ (also der Koordinatenring zu $\mathbf{V}_\mathbb{C}(Y - X^2) \subset \mathbb{C}^2$), sei $p \subset R$ das von $\{[X],[Y]\}$ erzeugte Primideal in R, sei R_p die Lokalisierung von R an $R \setminus p$ und sei m_p das (vom Bild) von p erzeugte Ideal in R_p. Außerdem sei $T_p := m_p/m_p \cdot m_p$ (als R_p-Modul); man bezeichnet T_p auch als *Tangentialraum* von $\operatorname{Spec} R$ im Punkt p, da er durch Ignorieren Terme höherer Ordnung (also durch Ausdividieren von $m_p \cdot m_p$) gebildet wird.

1. Zeigen Sie, dass $R_p \cong_{\mathsf{Ring}} \bigl\{[f]/[g] \in Q(R) \bigm| f,g \in \mathbb{C}[X,Y], g(0,0) \neq 0\bigr\}$.
2. Zeigen Sie, dass m_p ein maximales Ideal in R_p mit $R_p/m_p \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}$ ist.
3. Zeigen Sie, dass T_p auf kanonische Weise ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.
4. Bestimmen Sie $\dim_\mathbb{C} T_p$.

Aufgabe 3 (Lokalitätskriterien). Sei R ein Ring, sei $m \subset R$ ein Ideal mit $m \neq R$. Zeigen Sie:

1. Ist jedes Element aus $R \setminus m$ eine Einheit in R, so ist R ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal m).
2. Ist m ein maximales Ideal in R und ist für jedes $x \in m$ das Element $1 + x$ eine Einheit in R, so ist R ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal m).

Aufgabe 4 (Surjektivitätskriterium). Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a \subset J(R)$. Außerdem sei M ein R-Modul, sei N ein endlich erzeugter R-Modul, sei $f\colon M \longrightarrow N$ ein R-Modulhomomorphismus und $\overline{f}\colon M/a{\cdot}M \longrightarrow N/a{\cdot}N$ der von f induzierter Homomorphismus. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Homomorphismus f ist surjektiv.
2. Der Homomorphismus $\overline{f}$ ist surjektiv.

Bonusaufgabe (Paritätskriterium).

1. Was besagt der Satz von Monsky?
2. Was hat dieser Satz mit dem Ring der 2-adischen ganzen Zahlen zu tun?

Bonusaufgabe (kommutative Algebraiker; zusätzliche Semesterhalbzeitbonusaufgabe). (Wo) Hängen Bilder von Artin, Hensel, Hilbert, Noether auf den Fluren der Fakultät? Wann haben diese Mathematiker gelebt?

Abgabe bis zum 1. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen