# Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 8 vom 1. Juni 2018

---

**Aufgabe 1** (Dimension vs. Lokalität). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $R$ ein lokaler Ring, so ist $\dim R = 0$.
2. Ist $R$ ein Ring mit $\dim R = 0$, so ist $R$ ein lokaler Ring.

**Aufgabe 2** (Lokalität der Dimension, Variante). Sei $R$ ein Ring. Zeigen Sie, dass

$$\dim R = \sup \{\dim R_f \mid f \in R\}.$$

**Aufgabe 3** (Flachheit vs. Lokalisierung). Sei $R$ ein Ring, sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sei $M$ ein $R$-Modul.

1. Zeigen Sie: Ist $M$ flach, so ist $S^{-1}M$ ein flacher $S^{-1}R$-Modul.
2. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im allgemeinen *nicht* gilt.

**Aufgabe 4** (nicht so glatt). Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$ (also der Koordinatenring zu $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2) \subset \mathbb{C}^2$), sei $p \subset R$ das von $\{[X],[Y]\}$ erzeugte Primideal in $R$, sei $R_p$ die Lokalisierung von $R$ an $R \setminus p$ und sei $m_p$ das (vom Bild) von $p$ erzeugte Ideal in $R_p$. Außerdem sei $T_p := m_p/m_p \cdot m_p$ (als $R_p$-Modul; Aufgabe 2 von Blatt 7).

1. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}} T_p$ analog zu Aufgabe 2 von Blatt 7.
2. Schließen Sie daraus, dass $R_p$ *nicht* zu $(\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2))_{([X],[Y])}$ isomorph ist, und erklären Sie, wie das mit der Anschauung zusammenpasst.

**Bonusaufgabe** (Fasern). Seien $R, R'$ Ringe, sei $f \colon R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus und sei $p \in \operatorname{Spec} R$.

1. Zeigen Sie: Dann gibt es eine mit Inklusionen von Idealen verträgliche Bijektion
$$(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p) \longleftrightarrow \operatorname{Spec} k(p) \otimes_R R';$$
dabei ist $k(p)$ der Restklassenkörper des lokalen Rings $R_p$ und $R'$ wird via $f$ als $R$-Modul aufgefasst.
2. Wie kann man diese Beschreibung der Faser $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p)$ verwenden, um einen konzeptionellen Beweis von Lemma 2.3.10 zu erhalten?

---

Abgabe bis zum 8. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen