

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 11 vom 26. Juni 2018

Aufgabe 1 (Noether, Artin und Dedekind). Welche der folgenden Ringe sind noethersch? Artinsch? Dedekindsch?

1. $\mathbb{Z}/(2018)$
2. $\mathbb{Q}[X, Y]$
3. $\mathbb{Z}[X, Y]/(Y - X^2)$
4. $\mathbb{Z}_{(5)}[T]$
5. $\mathbb{Z}_{(5)}$

Aufgabe 2 (diskrete Bewertungsringe). Welche der folgenden Ringe sind diskrete Bewertungsringe?

1. $\mathbb{R}[T]/(T^2 + 2018)$
2. $\mathbb{R}[T]_{(T^2+2018)}$
3. $\mathbb{Z}_{(5)} \times \mathbb{Z}_{(2017)}$
4. \mathbb{Z}_{2017}

Aufgabe 3 (Quiz zu Kapitel 4). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist R ein Ring, der ein endlich erzeugtes Ideal enthält, so ist R noethersch.
2. Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch $R[X, Y]$ noethersch.
3. Ist R ein noetherscher Ring, so ist nach dem Artin-Tate-Lemma jede endlich erzeugte R -Algebra auch als R -Modul endlich erzeugt.
4. Ist R ein noetherscher Ring, so ist ein Ideal $q \subset R$ genau dann primär, wenn \sqrt{q} maximal ist.
5. Ist R ein artinscher Ring, so besitzt jedes Ideal von R eine Primärzerlegung.
6. Ist R ein Dedekindring, so ist auch $R[T]$ ein Dedekindring.

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 4.3, 4.4, 4.5 (Primärzerlegung, artinsche Ringe, Dedekindringe); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Primärzerlegungen? Wann existieren sie? Wie eindeutig sind sie?
2. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben artinsche Ringe?
3. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben Dedekindringe?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein? Wozu sind diese Begriffe gut?

keine Abgabe!