Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 12 vom 3. Juli 2018

Aufgabe 1 (Ketten, Zykel, Ränder, Homologie). Bestimmen Sie für die folgenden Kettenkomplexe von $\mathbb{Z}$-Moduln alle Zykel und Ränder sowie die Homologie.

1. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2018} \mathbb{Z}$
2. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$
3. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2$
4. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4$

Aufgabe 2 (Kettenabbildungen). Zwischen welchen der Kettenkomplexe aus Aufgabe 1 gibt es Kettenabbildungen, die in Homologie *nicht* in jedem Grad die Nullabbildung induzieren?

Aufgabe 3 (Projektivität). Welche der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln sind projektiv?

1. $\mathbb{Z}/2018 \oplus \mathbb{Z}/2017$
2. $\mathbb{Z}[T]$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Z}^{2018}$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 5.1 (Kettenkomplexe und Homologie); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Ketten, Zykel, Ränder? Warum heißen sie so?
2. Was ist die Homologie eines Kettenkomplexes? Wozu braucht man sie?
3. Welche Techniken kennen Sie, um Homologiegruppen zu berechnen?
4. Was sind Kettenabbildungen, Kettenhomotopien? Wie interagieren sie mit Homologie?
5. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Wiederholen Sie bei dieser Gelegenheit auch nochmal den Algorithmus von Gauß und die Smith-Normalform.

---

keine Abgabe!