Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser Blatt 2 vom 24. April 2018

Aufgabe 1 ((Ko)Limiten in Set)**.** Sei X eine Menge. Wir betrachten die gewöhnliche Anordnung auf $\mathbb{N}$.

1. Was ist $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (bezüglich der Inklusionsabbildungen), wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilmengen in X ist?
2. Was ist $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (bezüglich der Inklusionsabbildungen), wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Teilmengen in X ist?

Aufgabe 2 ((Ko)Limiten über die leere Indexmenge)**.** Sei C eine Kategorie. Wir betrachten die leere (einzige!) partielle Ordnung auf $I := \emptyset$.

1. Geben Sie eine explizitere Formulierung dafür, was $\varinjlim_I$ in C erfüllt.
2. Geben Sie eine explizitere Formulierung dafür, was $\varprojlim_I$ in C erfüllt.
3. Existieren diese (Ko)Limiten in der Kategorie Ring ?
4. Existieren diese (Ko)Limiten in der Kategorie ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$?

Aufgabe 3 (Tensorprodukte)**.**

1. Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul, sei N ein R-Linksmodul und sei Z eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie: Ist $f\colon M \times N \longrightarrow Z$ eine R-balancierte Abbildung, so folgt
$$\forall_{n\in N} \quad f(0,n) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_{m\in M} \quad f(m,0) = 0.$$
2. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2018}$.
3. Was ist $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2018$?

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie Primideale, maximale Ideale, Restklassenringe aus der (Linearen) Algebra.
Hinweis. Falls Sie diese Begriffe aus der Linearen Algebra noch nicht kennen, ist das kein Problem; ich werde sie in der Vorlesung auch nochmal kurz wiederholen.

keine Abgabe!