

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 6 vom 22. Mai 2018

Aufgabe 1 (Koordinatenringe). Sei $f := Y^2 - X^3 + X \in \mathbb{R}[X, Y]$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie einen Punkt in $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)$ an.
3. Bestimmen Sie $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$.
4. Geben Sie zwei verschiedene Primideale in $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$ an.
5. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$.

Aufgabe 2 (Quiz zu Kapitel 1). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. In jeder nicht-leeren Kategorie gibt es mindestens einen Isomorphismus.
2. Die Funktoren $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{R}): {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod} \rightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$ sind natürlich isomorph.
3. In der Kategorie der endlichen Gruppen existieren alle inversen Limiten.
4. Für alle \mathbb{Z} -Moduln M, M', N mit $M \cong_{\mathbb{Z}} M'$ gilt $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong_{\mathbb{C}} M' \otimes_{\mathbb{Z}} N$.
5. Für alle \mathbb{Z} -Moduln M, M', N mit $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong_{\mathbb{Z}} M' \otimes_{\mathbb{Z}} N$ gilt $M \cong_{\mathbb{Z}} M'$ oder $N \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

Aufgabe 3 (Quiz zu Kapitel 2). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. $|\mathrm{Spec} \mathbb{R}| = |\mathrm{Spec} \mathbb{F}_2|$
2. $|\mathrm{Spec} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathrm{Spec} \mathbb{Z}/(2018)|$
3. $|\mathrm{Spec} \mathbb{Q}[T]| = |\mathrm{Spec} \mathbb{Q}[T]/(T^3 - T)|$
4. Für alle affinen algebraischen Mengen $V \subset \mathbb{C}^5$ ist $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(V))) = \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(V)$.
5. $\dim \mathbb{Z}[T] = \dim \mathbb{Z}/(2017)[T]$
6. $\dim \mathbb{Z}[T] = \dim \mathbb{Z}/(2018)[T]$
7. $\dim \mathbb{F}_2[X, Y, Z] = \dim \mathbb{Z}[X, Y, Z]$
8. Bezüglich der Zariski-Topologie ist $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ kompakt.

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 2.3 (Dimension); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Wie ist die Dimension eines Rings definiert?
2. Wie passt der Dimensionsbegriff mit der naiven Anschauung zusammen?
3. Was sind grundlegende Eigenschaften der Dimension von Ringen?
4. Welche Berechnungsmethoden für die Dimension kennen Sie?
5. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

keine Abgabe!