

# Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser

Blatt 7 vom 29. Mai 2018

---

**Aufgabe 1** (lokale Ringe). Welche der folgenden Ringe sind lokal?

1.  $\mathbb{Z}/(5)$
2.  $\mathbb{Z}/(25)$
3.  $\mathbb{Z}/(55)$
4.  $\mathbb{Z}/(125)$
5.  $\mathbb{Z}_{(5)}$
6.  $\mathbb{Z}_5$

**Aufgabe 2** (Lokalisierungen). Welche linke Seite passt zu welcher rechten Seite?

|   |  |
|---|--|
| $\mathbb{Z}_5$  | $\{\sum_{j=-n}^n a_j \cdot T^j \mid n \in \mathbb{N}, a_{-n}, \dots, a_n \in \mathbb{F}_5\}$ |
| $\mathbb{F}_5[T]_{(T)}$                                 | $\{0\}$  |
| $\mathbb{F}_5[T]_T$                                     | $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b\}$  |
| $\mathbb{Z}_{(5)}$                                      | $\{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{F}_5[T], g(0) \neq 0\}$                                 |
| $(\mathbb{F}_5[T] \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{F}_5[T]$ | $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} \quad b = 5^n\}$           |
| $(5 \cdot \mathbb{Z} \cup \{1\})^{-1}\mathbb{Z}$        | $\mathbb{F}_5(T)$  |

**Aufgabe 3** (Exaktheit). Welche der folgenden Funktoren sind exakt?

1.  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : \mathbb{Z}\text{Mod} \rightarrow \mathbb{Q}\text{Mod}$
2.  $\mathbb{Q}[T] \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : \mathbb{Z}\text{Mod} \rightarrow \mathbb{Q}\text{Mod}$
3.  $\mathbb{F}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : \mathbb{Z}\text{Mod} \rightarrow \mathbb{F}_5\text{Mod}$
4.  $\mathbb{F}_5 \otimes_{\mathbb{F}_5} \cdot : \mathbb{F}_5\text{Mod} \rightarrow \mathbb{F}_5\text{Mod}$
5.  $\mathbb{Z}_{(5)} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : \mathbb{Z}\text{Mod} \rightarrow \mathbb{Z}_{(5)}\text{Mod}$
6.  $\mathbb{Z}/(55) \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : \mathbb{Z}\text{Mod} \rightarrow \mathbb{Z}/(55)\text{Mod}$

**Aufgabe 4** (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 3.1 (Lokale Ringe) und 3.2 (Lokalisierung von Ringen und Moduln); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind lokale Ringe? Was ist Lokalisierung?
2. Wie passen Lokalisierungen/lokale Ringe mit der Anschauung zusammen?
3. Was sind grundlegende Eigenschaften von lokalen Ringen/Lokalisierungen?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

---

keine Abgabe!