Klausur zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 16. Juli 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 6 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Als Hilfsmittel ist nur die handschriftlich ausgefüllte Vorlage (DIN A4, keine Kopie) zulässig.

– Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte maximal	12	12	12	12	12	60
erreichte Punkte						

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y + X^2 - 1)$.

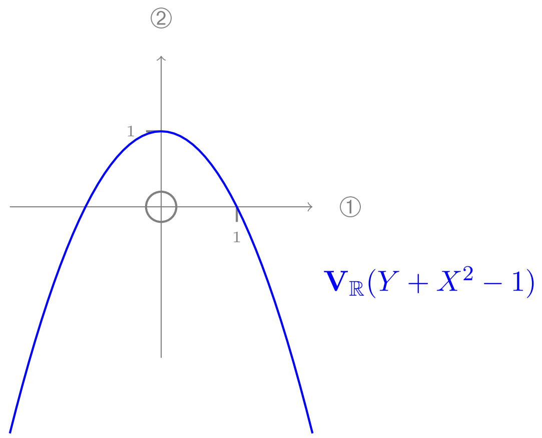
1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y + X^2 - 1) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie einen abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$ an. Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Ist der Ring R noethersch? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Bestimmen Sie den Koordinatenring $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y + X^2 - 1)]$. Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y + X^2 - 1) &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y + x^2 - 1 = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y = 1 - x^2\big\};\end{aligned}$$

   somit erhalten wir:



2. Maximale Ideale in R sind abgeschlossene Punkte in $\operatorname{Spec} R$. Es genügt also, ein maximales Ideal in R anzugeben.

   Es ist $([X],[Y-1])$ ein maximales Ideal in R, denn der zugehörige Restklassenring

$$\begin{aligned}R/([X],[Y-1]) &\cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}[X,Y]/(Y + X^2 - 1, X, Y - 1) \\ &= \mathbb{C}[X,Y]/(X, Y-1) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}\end{aligned}$$

   ist ein Körper.

3. Ja, denn: Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $\mathbb{C}[X,Y]$ noethersch. Außerdem sind Restklassenringe von noetherschen Ringen noethersch. Also ist $R = \mathbb{C}[X,Y]/(Y+X^2-1)$ noethersch.

4. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist

$$\mathbf{K}_{\mathbb{C}}\big[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y+X^2-1)\big] = \mathbb{C}[X,Y]/\sqrt{(Y+X^2-1)}.$$

Das Ideal $(Y+X^2-1) \subset \mathbb{C}[X,Y]$ ist prim, denn $Y+X^2-1 \in \mathbb{C}[X][Y]$ ist aus Gradgründen irreduzibel (und $\mathbb{C}[X,Y] \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}[X][Y]$ ist faktoriell). Also ist $\sqrt{(Y+X^2-1)} = (Y+X^2-1)$, und damit

$$\mathbf{K}_{\mathbb{C}}\big[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y+X^2-1)\big] = \mathbb{C}[X,Y]/\sqrt{(Y+X^2-1)} = R.$$

Aufgabe 2 (8 + 4 = 12 Punkte).

1. Wie beweist man, dass jedes Ideal in einem noetherschen Ring eine Primärzerlegung besitzt? Skizzieren Sie kurz die wichtigsten Beweisschritte!
2. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes eingehen.

Lösung:

1. Sei R ein noetherscher Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal. Man zeigt:
   - Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und irreduzible Ideale $q_1, \dots, q_n \subset R$ mit
     $$a = \bigcap_{j=1}^{n} q_j,$$
     denn: *Angenommen*, es gäbe ein Ideal in R, das *nicht* als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale geschrieben werden kann.
     Man betrachtet dann die (nicht-leere!) Menge M aller Ideale in R, die nicht als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale in R geschrieben werden können. Da R noethersch ist, besitzt M ein bezüglich Inklusion maximales Element (welches insbesondere nicht irreduzibel ist). Dies führt man nun zum Widerspruch.
   - Jedes irreduzible Ideal in R ist primär, denn: Durch Übergang zum Restklassenring genügt es, nur den Fall des Nullideals zu betrachten.
     Seien daher $x, y \in R$ mit $x \cdot y = 0$. Man betrachtet dann die aufsteigende Kette
     $$N(y) \subset N(y^2) \subset \dots$$
     von Idealen in R und wendet auf diese Kette an, dass R noethersch ist.
2. Solche Resultate sind zum Beispiel [zwei davon genügen]:
   - Das Artin-Tate-Lemma über die Vererbung von endlicher Erzeugtheit von Algebren über noetherschen Ringen.
   - Das Zariski-Lemma (Mini-Noether-Normalisierung) über endlich erzeugte Algebren über Körpern.
   - Die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes (über maximale Ideale in endlich erzeugten Algebren über Körpern).

Aufgabe 3 ($3+3+3+3 = 12$ Punkte)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Funktor ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathsf{Mod}$, der mit Kolimiten verträglich ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R mit $\dim R = 1$, der *kein* Dedekindring ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und ein $p \in \operatorname{Spec} R$, so dass R_p noethersch ist, aber R *nicht* noethersch ist.
4. Geben Sie ein Beispiel für einen Körper, der als $\mathbb{Z}$-Modul *nicht* flach ist.

Lösung:

1. Der Funktor $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathsf{Mod}$ ist mit Kolimiten verträglich (als Tensorproduktfunktor).

   [Ein noch einfacheres Beispiel sind „konstante“ Funktoren.]

2. Nach Definition sind Dedekindringe Integritätsringe. Es genügt also, einen eindimensionalen Ring anzugeben, der kein Integritätsring ist. Zum Beispiel ist $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2)$ ein solcher Ring (oder auch $\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}$ ...).

   Weitere Beispiele für eindimensionale Ringe, die keine Dedekindringe sind, sind $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ oder Ringe, die man aus der Gegenbeispielkonstruktionsmaschine erhält.

3. Sei $R := \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]$. Dann ist R nicht noethersch. Da R ein Integritätsring ist, ist das Nullideal (0) ein Primideal in R und die Lokalisierung

   $$R_{(0)} = Q(R)$$

   ist ein Körper; insbesondere ist $R_{(0)}$ noethersch.

4. Zum Beispiel ist der Körper $\mathbb{F}_2 \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(2)$ *nicht* flach über $\mathbb{Z}$, wie man sehen kann, indem $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ auf die kurze exakte Sequenz

   $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\;2\;} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Proj.}} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

   in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ anwendet.

Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 Punkte).

1. Sei R ein Ring und $m \subset R$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass R/m^{2018} ein lokaler Ring ist.

2. Sei R ein lokaler Ring, sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a \neq R$, sei M ein endlich erzeugter R-Modul und sei $N \subset M$ ein R-Untermodul mit
$$M = \operatorname{Span}_R(a \cdot M \cup N).$$
Zeigen Sie, dass $M = N$.

Lösung:

1. Sei $\pi \colon R \longrightarrow R/m^{2018} =: \overline{R}$ die kanonische Projektion. Dann ist
$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} \overline{R} &\longrightarrow \{q \in \operatorname{Spec} R \mid m^{2018} \subset q\} \\ p &\longmapsto \pi^{-1}(q) \end{aligned}$$
eine inklusionserhaltende Bijektion.

   Sei $n \subset \overline{R}$ ein maximales Ideal. Dann ist $\widetilde{n} := \pi^{-1}(n) \subset R$ ein maximales Ideal mit $m^{2018} \subset \widetilde{n}$. Also ist (da $\widetilde{n}$ und m prim sind)
$$\widetilde{n} = \sqrt{\widetilde{n}} \supset \sqrt{m^{2018}} \supset m.$$
   Da m und $\widetilde{n}$ maximale Ideale sind, erhalten wir $\widetilde{n} = m$, und damit $n = \pi(m)$.

   Daher besitzt $\overline{R}$ nur genau ein maximales Ideal, nämlich $n = \pi(m)$. Also ist der Ring $\overline{R}$ lokal.

2. Wir betrachten den R-Modul $\overline{M} := M/N$. Dann ist $\overline{M}$ endlich erzeugt als R-Modul (da M endlich erzeugt ist) und nach Voraussetzung ist
$$\overline{M} = a \cdot \overline{M}.$$
   Da R lokal und $a \neq R$ ist, ist $a \subset J(R)$. Mit dem Lemma von Nakayama erhalten wir somit
$$M/N = \overline{M} \cong_R (0)$$
   bzw. $M = N$.

Aufgabe 5 ($6 + 6 = 12$ Punkte).

1. Sei R ein (kommutativer!) Ring, und seien P und Q projektive R-Moduln. Zeigen Sie, dass dann auch der R-Modul $P \otimes_R Q$ projektiv ist.

2. Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \operatorname{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $S \subset C_n$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$-Moduls C_n. Zeigen Sie, dass

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \leq |S|.$$

Lösung:

1. (Da R ein kommutativer Ring ist, ist $P \otimes_R Q$ in kanonischer Weise ein R-Modul.)

   Da P und Q freie R-Moduln sind, gibt es freie R-Moduln E und F sowie R-Moduln $\overline{P}$ bzw. $\overline{Q}$ mit

$$P \oplus \overline{P} \cong_R E \quad \text{und} \quad Q \oplus \overline{Q} \cong_R F.$$

   Also ist

$$\begin{aligned} E \otimes_R F &\cong_R (P \oplus \overline{P}) \otimes_R (Q \oplus \overline{Q}) \\ &\cong_R (P \otimes_R Q) \oplus \big(\overline{P} \otimes_R (Q \oplus \overline{Q})\big) \oplus (P \otimes_R \overline{Q}). \end{aligned}$$

   Die Verträglichkeit des Tensorprodukts mit direkten Summen zeigt außerdem, dass $E \otimes_R F$ ein freier R-Modul ist. Also ist $P \otimes_R Q$ ein direkter Summand in einem freien R-Modul, und damit ein projektiver R-Modul.

2. Da S ein Erzeugendensystem von C_n ist, ist $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_n) \leq |S|$. Insbesondere ist

$$\dim_{\mathbb{Q}} Z_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_n) \leq |S|,$$

   und damit

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) = \dim_{\mathbb{Q}} \frac{Z_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C)}{B_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C)} \leq \dim_{\mathbb{Q}} Z_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \leq |S|.$$