Kommutative Algebra

Sommersemester 2018
Universität Regensburg

Clara Löh

Version vom 7. Juni 2021
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg
©Clara Löh, 2018

Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise vii

0 Einführung 1

1 Grundwortschatz Kategorientheorie 5

1.1 Kategorien 6

1.1.1 Kategorien 6

1.1.2 Wiederholung: Die Kategorie der Ringe 9

1.1.3 Wiederholung: Die Kategorie der Moduln 12

1.1.4 Kommutative Diagramme 15

1.2 Funktoren 16

1.2.1 Funktoren 17

1.2.2 Wiederholung: Dualräume 20

1.3 Natürliche Transformationen 22

1.3.1 Natürliche Transformationen 22

1.3.2 Darstellbare Funktoren 24

1.4 (Ko)Limiten 26

1.4.1 (Ko)Limiten 26

1.4.2 Alte Bekannte 30

1.4.3 Verträglichkeit mit (Ko)Limiten 33

1.5 Beispiel: Das Tensorprodukt 35

1.5.1 Wiederholung: Das Tensorprodukt von Vektorräumen 35

1.5.2 Das Tensorprodukt 37

1.5.3 Verträglichkeit mit Kolimiten 42

1.5.4 Beispiele 45

2 Das Primspektrum 49
2.1 Das Primspektrum 50
2.1.1 Wiederholung: Primideale und maximale Ideale 50
2.1.2 Punkte vs. Ideale 52
2.1.3 Das Primspektrum 54
2.2 Affine algebraische Geometrie 58
2.2.1 Der affine Raum 58
2.2.2 Die Zariski-Topologie 60
2.2.3 Affine algebraische Mengen und Radikale 62
2.3 Dimension 74
2.3.1 Die Dimension eines Rings 74
2.3.2 Polynomringe in einer Variablen 75
2.3.3 Polynomringe in mehreren Variablen 80

3 Lokalisierung 85
3.1 Lokale Ringe 86
3.2 Lokalisierung von Ringen und Moduln 89
3.2.1 Lokalisierung von Ringen 90
3.2.2 Lokalisierung von Moduln 94
3.2.3 Exaktheit 96
3.3 Lokalisierung und das Primspektrum 97
3.3.1 Das Primspektrum von Lokalisierungen 98
3.3.2 Lokalisierungen und Dimension 101
3.4 Lokale Eigenschaften 104
3.5 Vervollständigung 112

4 Noethersche und Artinsche Ringe 119
4.1 Noethersche Ringe und Moduln 120
4.1.1 Noethersche Ringe 120
4.1.2 Moduln über noetherschen Ringen 123
4.1.3 Der Hilbertsche Basissatz 124
4.2 Der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes 126
4.3 Primärzerlegung 130
4.3.1 Primäre Ideale 130
4.3.2 Primärzerlegung in noetherschen Ringen 132
4.4 Artinsche Ringe 138
4.5 Dedekindringe 141
4.5.1 Diskrete Bewertungsringe 143
4.5.2 Eine lokale Charakterisierung von Dedekindringen 147

5 Elementare Homologische Algebra 149
5.1 Kettenkomplexe und Homologie 150
5.1.1 Die Kategorie der Kettenkomplexe 150
5.1.2 Homologie von Kettenkomplexen 153
5.1.3 Fünferlemma und lange exakte Homologiesequenz 156
5.2 Projektive Auflösungen 159
5.2.1 Projektive Moduln 160

5.2.2 Projektive Auflösungen 163
5.2.3 Der Fundamentalsatz der homologischen Algebra 167
5.3 Tor 170
5.3.1 Axiomatische Beschreibung 171
5.3.2 Konstruktion 173
5.3.3 Beispiele 176

A Anhang A.1
A.1 Das Wörterbuch der affinen algebraischen Geometrie A.3
A.2 Die adische Topologie A.5
A.3 Algorithmische Kommutative Algebra A.7
A.3.1 Monomiale Ideale A.8
A.3.2 Leitkoeffizienten A.8
A.3.3 Verallgemeinerte Division A.9
A.3.4 Gröbner-Basen A.10
A.3.5 Der Algorithmus von Buchberger A.11
A.3.6 Ein Beispielproblem A.12

B Übungsblätter B.1

C Fingerübungen C.1

D Allgemeine Hinweise D.1

Literaturverzeichnis E.1

Symbolverzeichnis E.3

Index E.7

Literaturhinweise

Die Vorlesung wird sich nicht an einer einzelnen Quelle orientieren und es gibt sehr viele Bücher, die den Standardstoff behandeln – Sie sollten also individuell je nach Thema und eigenen Vorlieben die Literatur auswählen, die am besten zu Ihnen passt.

Kommutative Algebra

- M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Westview Press, 1969.
- S. Bosch. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Universitext, Springer, 2013.
- D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150, Springer, 1999.
- S. Lang. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211, dritte überarbeitete Auflage, Springer, 2002.
- D.A. Cox, J. Little, D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, vierte Auflage, Springer, 2015.

Lösungsstrategien

- A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009.
  http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-8348-9599-8

- A.G. Konforowitsch. *Logischen Katastrophen auf der Spur*, zweite Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1994.
- C. Löh, S. Krauss, N. Kilbertus. *Quod erat knobelandum*, Springer Spektrum, 2016.
- G. Polya, J.H. Conway (Hrsg.). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, 2014.
- T. Tao. *Solving mathematical problems. A personal perspective*, Oxford University Press, 2006.

Weiterführende Literatur

- M. Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie: Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen*, Springer Spektrum, 2015.
- S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998.
- C. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38, Cambridge University Press, 1995.

0
Einführung

Die Kommutative Algebra beinhaltet die systematische (Weiter)Entwicklung der Ring- und Modultheorie, mit einem besonderen Augenmerk auf *kommutativen* Ringen, und bildet die Grundlage für eine weitere Vertiefung im Bereich der algebraischen Zahlentheorie, der algebraischen Geometrie und auch für manche Aspekte der algebraischen Topologie.

Warum Kommutative Algebra?

Zentrale Probleme der Algebra sind Fragestellungen zur Lösung polynomialer Gleichungen und zur Teilbarkeit. Wie wir bereits wissen, bietet es sich an, diese Probleme mithilfe der Ringtheorie zu behandeln. Dabei spielt die Primeigenschaft eine wichtige Rolle. Naheliegende Fragen sind zum Beispiel:

- Gibt es einen Integritätsring mit genau 2018 Primidealen?
- Wie können Primideale geschachtelt sein?
- Welche Zusatzstruktur trägt die Menge der Primideale eines Rings?
- Wie kann man sich auf die Eigenschaften eines Ringes bezüglich eines Primelements konzentrieren?
- Was nützt die Idealtheorie bei der Betrachtung von Lösungsmengen polynomialer Gleichungen (in mehreren Variablen)?

Untrennbar verbunden mit der Untersuchung von Ringen ist die Untersuchung der zugehörigen Moduln. Wir werden daher auch die Modultheorie weiter fortführen. Standardkonstruktionen von Moduln sind etwa direkte

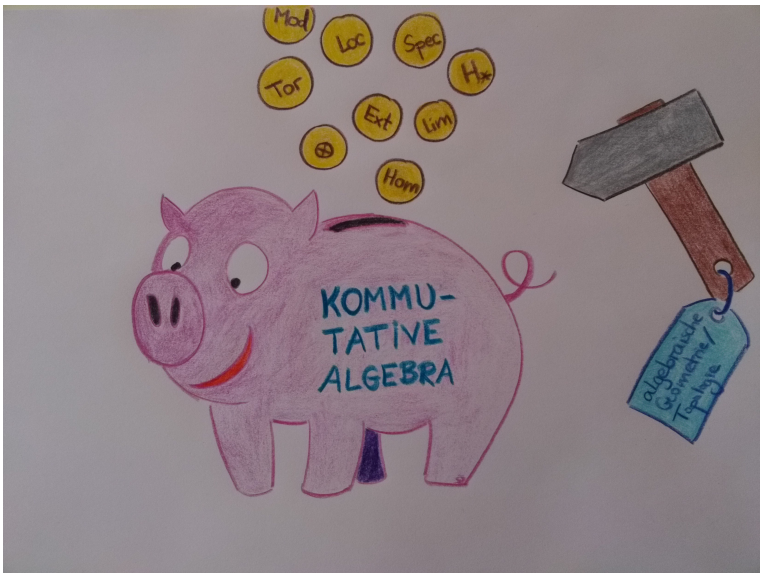


Abbildung 0.1.: Kommutative Algebra, schematisch

Summen, Produkte, Quotienten, Tensorprodukte und Dualräume. Möchte man produktiv mit Moduln umgehen, so ist es unerlässlich, sich damit zu befassen, wie diese Konstruktionen miteinander interagieren; zum Beispiel:

- Wie verträgt sich das Tensorprodukt mit injektiven Homomorphismen? Mit Quotienten?
- Allgemeiner: Welche Konstruktionen vertragen sich gut mit exakten Sequenzen?
- Wie kann man das Tensorprodukt und Dualräume bezüglich Exaktheit „retten“?

Die Kommutative Algebra liefert also das Basiswerkzeug um die beiden essentiellen Zerlegungsprinzipien der Algebra besser zu verstehen:

- Die Zerlegung mithilfe von exakten Sequenzen (zum Beispiel via direkte Summen etc.) und
- die Zerlegung mithilfe von Primelementen (zum Beispiel via Lokalisierungen).

Diese Grundlagen sind der Ausgangspunkt für die algebraische Zahlentheorie, die algebraische Geometrie und Teile der algebraischen Topologie (Abbildung 0.1).

Überblick über die Vorlesung

Das Hauptziel der Vorlesung ist, die Grundlagen über Ringe, Moduln und Konstruktionsmechanismen so weit zu entwickeln, dass sie in der algebraischen Geometrie/Zahlentheorie/Topologie eingesetzt werden können.

Für viele Aspekte der Kommutativen Algebra bietet es sich an, die Sprache der Kategorientheorie und der *kommutativen* Diagramme zu verwenden. Wir beginnen daher mit einem kurzen Einblick in die Kategorientheorie. Die Einführung dieses Formalismus wird sich an vielen Stellen (nicht nur in der Algebra!) bezahlt machen.

Bei der spezielleren Untersuchung von Ringen und Moduln werden wir uns von geometrischen Ideen leiten lassen und zunächst erklären, welche geometrische Bedeutung die Menge der Primideale eines Ringes besitzt, und wie man lokale Techniken effizient einsetzen kann. Im Anschluss werden wir Ringe mit übersichtlicher Idealstruktur genauer betrachten:

- noethersche/artinsche Ringe
- Bewertungsringe

Außerdem werden wir untersuchen, wie sich das Tensorprodukt (bzw. Dualräume) bezüglich exakter Sequenzen verhält. Dies führt zur homologischen Algebra und zum Konzept der abgeleiteten Funktoren.

Anmerkung zum Lernen. Dieses Skript dokumentiert die in der Vorlesung behandelten Inhalte. Es dient keineswegs dazu, den Besuch der Vorlesung oder gar der Übungen zu ersetzen. Außerdem spiegelt sich in diesem Skript natürlich nur ein kleiner Ausschnitt der Kommutativen Algebra wider. Sie sollten sich unbedingt auch mithilfe anderer Quellen (Bücher!) selbst ein Bild des gesamten Gebietes machen!

Referenzen der Form „Satz I.6.4.11“, „Satz II.2.4.33“ oder „Satz III.2.2.25“ verweisen auf die entsprechende Stelle im Skript zur Linearen Algebra I/II bzw. Algebra:

http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/linalg1_ws1617/lecture_notes.pdf
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/linalg2_ss17/lecture_notes.pdf
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/algebra_ws1718/lecture_notes.pdf

Die Kommutative Algebra baut auf den Grundkenntnissen der Linearen Algebra auf. Lücken in der Linearen Algebra sollten Sie also zügig füllen.

Literaturaufgabe. Waren Sie schon einmal in der Bibliothek im Mathematikgebäude? Nicht nur an den Tischen, sondern auch bei den Regalen? Wo stehen Bücher zur Kommutativen Algebra?

Konvention. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen enthält die Null.

1

Grundwortschatz Kategorientheorie

Mathematische Theorien bestehen aus Objekten und strukturerhaltenden Abbildungen dazwischen. Dies abstrahiert man zum Begriff der Kategorie. Die Übersetzung zwischen mathematischen Theorien (d.h. zwischen Kategorien) erfolgt durch sogenannte Funktoren. Grob gesagt handelt es sich dabei um „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien“. Funktoren wiederum kann man mithilfe von natürlichen Transformationen vergleichen. Die Sprache der Kategorientheorie erlaubt es zum Beispiel, „generische“ Argumente über Isomorphismen und universelle Eigenschaften einheitlich zu behandeln.

Wir werden diese Konzepte an algebraischen Beispielen illustrieren und dabei auch Grundbegriffe aus der (Linearen) Algebra wiederholen.

Überblick über dieses Kapitel.

1.1	Kategorien	6
1.2	Funktoren	16
1.3	Natürliche Transformationen	22
1.4	(Ko)Limiten	26
1.5	Beispiel: Das Tensorprodukt	35

Schlüsselbeispiel. Kategorie der Ringe, Modulkategorien, Tensorprodukt

1.1 Kategorien

Mathematische Theorien bestehen aus Objekten (z.B. Gruppen, reelle Vektorräume, topologische Räume, messbare Räume, ...) und strukturerhaltenden Abbildungen (z.B. Gruppenhomomorphismen, $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, stetige Abbildungen, messbare Abbildungen, ...) dazwischen. Dies abstrahiert man zum Begriff der Kategorie [10, 3].

Kategorien liefern zum Beispiel eine einheitliche Formalisierung von Isomorphismen und kommutativen Diagrammen.

1.1.1 Kategorien

Definition 1.1.1 (Kategorie)**.** Eine *Kategorie* C besteht aus den folgenden Komponenten:

- Einer Klasse $\mathrm{Ob}(C)$; die Elemente von $\mathrm{Ob}(C)$ heißen *Objekte von* C.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Menge $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$; die Elemente von $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ heißen *Morphismen von* X *nach* Y *in* C. (Dabei wird implizit angenommen, dass die Morphismenmengen zwischen verschiedenen Objektpaaren disjunkt sind.)
- Zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Mor}_C(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X,Z) \\ (g,f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  von Morphismen.

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für jedes Objekt X in C gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_C(X, X)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ bzw. $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

  (Dadurch ist id_X eindeutig bestimmt (Übungsaufgabe) und heißt *Identitätsmorphismus von* X *in* C.)
- Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ: Für alle Objekte W, X, Y, Z in C und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(W, X)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $h \in \mathrm{Mor}_C(Y, Z)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Bemerkung 1.1.2 (Klassen)**.** Klassen sind ein Hilfsmittel, um der Paradoxie der „Menge aller Mengen“ zu entgehen (Kapitel I.1.3.3). Wer nicht mit der Mengenlehre nach von Neumann, Bernays, Gödel vertraut ist, kann sich einfach vorstellen, dass es sich dabei um „potentiell große“, „verallgemeinerte“ Mengen handelt.

Beispiel 1.1.3 (Mengenlehre)**.** Die Kategorie Set der Mengen besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ die Klasse(!) aller Mengen.
- Morphismen: Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y)$ die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
- Verknüpfungen: Sind X, Y und Z Mengen, so sei die Verknüpfung $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Z)$ die gewöhnliche Abbildungskomposition.

Es ist klar, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Ist X eine Menge, so ist die gewöhnliche Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

der Identitätsmorphismus id_X von X in Set.

Beispiel 1.1.4 (lineare Algebra)**.** Sei K ein Körper. Die Kategorie Vect_K der K-Vektorräume besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_K)$ die Klasse aller K-Vektorräume.
- Morphismen: Sind V und W Vektorräume über K, so sei $\mathrm{Mor}_K(V,W)$ die Menge aller K-linearen Abbildungen $V \longrightarrow W$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog erhält man auch die Kategorie Group der Gruppen, die Kategorie Ab der abelschen Gruppen, ...

Beispiel 1.1.5 (Topologie)**.** Die Kategorie Top der topologischen Räume besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top})$ die Klasse aller topologischen Räume.
- Morphismen: Sind X und Y topologische Räume, so sei

  $$\mathrm{map}(X,Y) := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$$

  die Menge aller stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.

- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Caveat 1.1.6. Das Konzept der Morphismen und Verknüpfungen ist nach dem Beispiel der Abbildungen zwischen Mengen und der gewöhnlichen Abbildungskomposition modelliert. Im allgemeinen muss es sich bei Morphismen aber nicht um Abbildungen zwischen Mengen und bei der Verknüpfung nicht um Abbildungskomposition handeln! (Beispiel 1.1.7)

Beispiel 1.1.7 (Gruppen als Kategorien)**.** Sei G eine Gruppe. Dann erhalten wir wie folgt eine Kategorie C_G:

- Objekte: Die Kategorie C_G besitze genau ein Objekt, etwa 0.
- Morphismen: Es sei $\mathrm{Mor}_C(0,0) := G$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(0,0) \times \mathrm{Mor}_C(0,0) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(0,0) \\ (g,h) &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Caveat 1.1.8 (Kategorie der Kategorien)**.** Bei einer systematischen Behandlung der Kategorientheorie ist man natürlich versucht, auch die Kategorie der Kategorien (mit Funktoren als Morphismen) zu betrachten. Um mit Konstrukten dieser Art mathematisch sauber arbeiten zu können, sind jedoch mengentheoretische Vorkehrungen nötig. Wir werden im folgenden nur mit der elementaren Kategorientheorie einzelner Kategorien arbeiten und müssen uns daher mit diesen mengentheoretischen Problemen nicht befassen.

Alle Konzepte und Tatsachen, die sich durch Objekte, Identitätsmorphismen und (Verknüpfung von) Morphismen ausdrücken lassen, besitzen eine allgemeine, kategorientheoretische, Version. Ein erstes Beispiel ist der Isomorphiebegriff:

Definition 1.1.9 (Isomorphismus)**.** Sei C eine Kategorie. Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ sind *isomorph in* C, wenn es Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,X)$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gibt. In diesem Fall sind f und g *Isomorphismen in* C und wir schreiben $X \cong_C Y$ (oder wenn die Kategorie aus dem Kontext klar ist: $X \cong Y$).

Beispiel 1.1.10 (Isomorphismenbegriffe)**.**

- Objekte in Set sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind.
- Sei K ein Körper. Objekte in Group, Ab, Vect_K, ... sind genau dann im obigen Sinne isomorph, wenn sie im gewöhnlichen algebraischen Sinne isomorph sind.

- Objekte in Top sind genau dann isomorph, wenn sie homöomorph sind (und bijektive stetige Abbildungen sind im allgemeinen *keine* Homöomorphismen!).

Proposition 1.1.11 (elementare Eigenschaften von Isomorphismen)**.** *Sei C eine Kategorie und seien $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$.*

1. *Der Identitätsmorphismus id_X ist ein Isomorphismus in C (von X nach X).*
2. *Ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ ein Isomorphismus in C, so gibt es genau einen Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,X)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*
3. *Gilt $X \cong_C Y$, so folgt auch $Y \cong_C X$.*
4. *Gilt $X \cong_C Y$ und $Y \cong_C Z$, so folgt auch $X \cong_C Z$.*

Beweis. Die bereits bekannten Argumente für Isomorphismen in konkreten Situationen lassen sich leicht in den allgemeinen kategorientheoretischen Kontext übersetzen (Übungsaufgabe). □

1.1.2 Wiederholung: Die Kategorie der Ringe

Die Kategorie der Ringe besteht aus Ringen und Ringhomomorphismen. Wir werden uns im folgenden nur mit assoziativen Ringen mit Eins, und meistens auch nur mit kommutativen Ringen, beschäftigen. Wir verwenden daher die folgenden Konventionen:

Definition 1.1.12 (Ring)**.** Ein *ninoko Ring* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge R und Abbildungen $+, \cdot : R \times R \longrightarrow R$ (*Addition* bzw. *Multiplikation*) mit folgenden Eigenschaften:

- Das Paar $(R, +)$ bildet eine abelsche Gruppe. Wir schreiben 0 für das neutrale Element dieser Gruppe.
- Die Multiplikation ist assoziativ und es gibt ein neutrales Element bezüglich Multiplikation; dieses ist dann eindeutig bestimmt (nachrechnen) und wird mit 1 bezeichnet.
- Es gilt das *Distributivgesetz*, d.h. für alle $x, y, z \in R$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Ein *Ring* ist ein ninoko Ring, der zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt:

- Die Multiplikation ist *kommutativ*, d.h.

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Caveat 1.1.13 (ninoko)**.** Die Abkürzung *ninoko* für „nicht notwendig kommutativ“ ist nicht Standard, aber sehr praktisch.

Beispiel 1.1.14 (Ringe)**.**

- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen Ring.
- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation *keinen* Ring, da $\mathbb{N}$ bezüglich Addition *keine* Gruppe ist.
- Jeder Körper ist bezüglich seiner Addition und Multiplikation ein Ring (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_2$).
- Das Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bildet bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation einen Ring.
- Ist R ein Ring, so ist der Polynomring $R[T]$ ein Ring.
- Die Menge
$$\left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus 2 \cdot \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$$
bildet bezüglich der von $\mathbb{Q}$ induzierten Addition und Multiplikation einen Ring (nachrechen).
- Etwas exotisch ist der *Nullring*; die unterliegende Menge ist $\{0\}$ und die Addition bzw. Multiplikation sind jeweils die einzig mögliche Abbildung $\{0\} \times \{0\} \longrightarrow \{0\}$. In diesem Ring ist 0 auch das neutrale Element der Multiplikation (also „$0 = 1$“).
- Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so bildet die Menge $M_{n\times n}(K)$ der $n \times n$-Matrizen bezüglich komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation einen ninoko Ring. Dieser Ring ist genau dann kommutativ, wenn $n \leq 1$ ist.

Ringhomomorphismen sind strukturerhaltende Abbildungen zwischen Ringen:

Definition 1.1.15 (Ringhomomorphismus)**.** Seien R, S ninoko Ringe. Ein *Ringhomomorphismus* $R \longrightarrow S$ ist eine Abbildung $f\colon R \longrightarrow S$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Abbildung f ist ein Gruppenhomomorphismus der unterliegenden additiven abelschen Gruppen, d.h. es gilt
$$\forall_{x,y\in R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$
- Es gilt $f(1) = 1$ und
$$\forall_{x,y\in R} \quad f(x\cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Beispiel 1.1.16 (Ringhomomorphismen)**.**

- Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto 2 \cdot n \end{aligned}$$

  ist *kein* Ringhomomorphismus, denn die Eins wird nicht auf die Eins abgebildet.

- Ist K ein Körper und $x \in K$, so ist der *Einsetzungshomomorphismus*

$$\begin{aligned} K[T] &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

  ein Ringhomomorphismus.

- Verknüpfungen von Ringhomomorphismen sind Ringhomomorphismen und die Identitätsabbildung auf einem Ring ist ein Ringhomomorphismus.

Beispiel 1.1.17 (Ringtheorie)**.** Die Kategorie Ring der Ringe besteht aus:

- Objekte: Es sei Ob(Ring) die Klasse aller Ringe.
- Morphismen: Sind R und S Ringe, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Ring}}(R, S)$ die Menge aller Ringhomomorphismen $R \longrightarrow S$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog definiert man die Kategorie nRing der ninoko Ringe.

Bemerkung 1.1.18 (Ringisomorphismen)**.** Sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

1. Der Ringhomomorphismus f ist ein Ringisomorphismus (d.h. ein Isomorphismus in der Kategorie nRing bzw. Ring).
2. Es gilt $\ker f = \{0\}$ und $\operatorname{im} f = S$. Dabei bezeichnen

$$\begin{aligned} \ker f &:= \big\{x \in R \;\big|\; f(x) = 0\big\} \subset R, \\ \operatorname{im} f &:= \big\{f(x) \;\big|\; x \in R\big\} \subset S \end{aligned}$$

   den *Kern* bzw. das *Bild* von f.

Die allgemeingültigen grundlegenden Eigenschaften aus Proposition 1.1.11 gelten selbstverständlich auch in nRing bzw. Ring; der Formalismus der Kategorientheorie zahlt sich also bereits aus.

1.1.3 Wiederholung: Die Kategorie der Moduln

Moduln sind die ringtheoretische Verallgemeinerung von Vektorräumen, d.h. Moduln sind abelsche Gruppen, die zusätzlich mit einer Skalarmultiplikation über einem Ring ausgestattet sind. Ist der zugrundeliegende Ring ninoko, so muss hier sorgfältig zwischen Links-, Rechts- und Bimoduln unterschieden werden.

Definition 1.1.19 (Modul)**.** Seien R und S ninoko Ringe. Ein *R-Linksmodul* ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge V und Abbildungen $+\colon V \times V \longrightarrow V$ bzw. $\cdot : R \times V \longrightarrow V$, mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.
- *Assoziativität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v \in V$ gilt
$$(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v).$$
- *Neutrale Skalarmultiplikation.* Für alle $v \in V$ gilt
$$1 \cdot v = v.$$
- *Distributivität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v, w \in V$ gilt
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \quad \text{und} \quad a \cdot (v + w) = a \cdot v + b \cdot w.$$

Ein *R-Unterlinksmodul von V* ist eine Teilmenge $U \subset V$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Abbildungen $+\colon V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot : R \times V \longrightarrow V$ schränken sich zu Abbildungen $+\colon U \times U \longrightarrow U$ und $\cdot : R \times U \longrightarrow U$ ein.
- Die Menge U bildet bezüglich dieser eingeschränkten Addition bzw. Skalarmultiplikation einen R-Modul.

Ein *R-Rechtsmodul* ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge V und Abbildungen $+\colon V \times V \longrightarrow V$ bzw. $\cdot : V \times R \longrightarrow V$, mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.
- *Assoziativität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v \in V$ gilt (man beachte die im Vergleich zu Linksmoduln veränderte Reihenfolge der Skalarmultiplikation mit a bzw. b!)
$$v \cdot (a \cdot b) = (v \cdot a) \cdot b.$$

- *Neutrale Skalarmultiplikation.* Für alle $v \in V$ gilt

$$v \cdot 1 = v.$$

- *Distributivität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v, w \in V$ gilt

$$v \cdot (a + b) = v \cdot a + v \cdot b \quad \text{und} \quad (v + w) \cdot a = v \cdot a + w \cdot a.$$

Ein (S, R)-*Bimodul* ist ein Quadrupel $(V, +, \bullet, \cdot)$, sodass $(V, +, \bullet)$ ein S-Linksmodul ist und $(V, +, \cdot)$ ein R-Rechtsmodul ist und die beiden Skalarmultiplikationen im folgenden Sinne verträglich sind:

$$\forall_{s \in S} \quad \forall_{r \in R} \quad \forall_{v \in V} \quad s \cdot (v \cdot r) = (s \cdot v) \cdot r.$$

Bemerkung 1.1.20 (lechts und rinks)**.**

- Ist R ein Körper, so sind R-Linksmoduln nichts anderes als R-Vektorräume.

- Abelsche Gruppen entsprechen in kanonischer Weise $\mathbb{Z}$-Moduln. Ist R ein ninoko Ring, so liefert jede R-Linksmodulstruktur eine $(R, \mathbb{Z})$-Bimodulstruktur, etc..

- Ist R ein (kommutativer!) Ring, so liefert jede R-Linksmodulstruktur auch eine R-Rechtsmodulstruktur (und umgekehrt), sowie eine (R, R)-Bimodulstruktur. In diesem Fall werden wir daher einfach von R-Moduln sprechen.

- Ist R ein ninoko Ring, so liefert die Ringstruktur eine (R, R)-Bimodulstruktur auf R.

- Ist R ein ninoko Ring und ist V ein R-Linksmodul, so bildet V mit derselben Addition und der Abbildung

$$\begin{aligned} V \times R &\longrightarrow V \\ (v, a) &\longmapsto a \cdot v \end{aligned}$$

  im allgemeinen *keinen* R-Rechtsmodul, denn:

  Zum Beispiel bildet $\mathbb{Q}^2$ bezüglich komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation $M_{2\times 2}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ einen $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$-Linksmodul. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \bullet \colon \mathbb{Q}^2 \times M_{2\times 2}(\mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathbb{Q}^2 \\ (x, A) &\longmapsto A \cdot x \end{aligned}$$

  liefert jedoch *keine* $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$-Rechtsmodulstruktur auf $\mathbb{Q}^2$: Für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$e_1 \bullet (A \cdot B) = (A \cdot B) \cdot e_1 = e_2 \neq 0 = B \cdot (A \cdot e_1) = (e_1 \bullet A) \bullet B.$$

Bemerkung 1.1.21 (Ideale)**.** Sei R ein ninoko Ring. Die R-Unterlinksmoduln von R sind dann genau die *Linksideale in* R, die R-Unterrechtsmoduln von R sind genau die *Rechtsideale in* R, und die (R, R)-Unterbimoduln von R sind genau die *beidseitigen Ideale in* R (was bedeutet das explizit?!). Einseitige Ideale in kommutativen Ringen sind bereits beidseitige Ideale und werden daher einfach als *Ideale* bezeichnet.

Kerne von Ringhomomorphismen zwischen ninoko Ringen sind beidseitige Ideale (nachrechnen). Die Untersuchung von Ringen und Ringhomomorphismen führt also auf natürlichem Wege in die Modultheorie.

Definition 1.1.22 (Modulhomomorphismus)**.** Sei R ein ninoko Ring und seien V, W Linksmoduln über R. Ein *R-Modulhomomorphismus* ist dann eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $v, v' \in V$ gilt
$$f(v + v') = f(v) + f(v')$$
- und für alle $v \in V$ und alle $a \in R$ gilt
$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v).$$

Analog definieren wir den Homomorphismenbegriff für Rechts- bzw. Bimoduln.

Beispiel 1.1.23 (Modultheorie)**.** Sei R ein ninoko Ring. Die Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ der R-Linksmoduln besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ die Klasse aller R-Linksmoduln.
- Morphismen: Sind V und W Linksmoduln über R, so sei $\mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(V, W)$ die Menge aller R-Modulhomomorphismen $V \longrightarrow W$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog definieren wir die Kategorie Mod_R der R-Rechtsmoduln bzw. die Kategorie ${}_S\mathsf{Mod}_R$ der (S, R)-Bimoduln.

Bemerkung 1.1.24 (Modulisomorphismen)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus von R-Linksmoduln (analog funktioniert dies auch für Rechts- bzw. Bimoduln). Dann sind äquivalent:

1. Der R-Modulhomomorphismus f ist ein R-Modulisomorphismus (d.h. ein Isomorphismus in der Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$).

2. Es gilt $\ker f = \{0\}$ und $\operatorname{im} f = S$. Dabei bezeichnen

$$\ker f := \big\{v \in V \;\big|\; f(v) = 0\big\} \subset V,$$
$$\operatorname{im} f := \big\{f(v) \;\big|\; v \in V\big\} \subset W$$

den *Kern* bzw. das *Bild* von f.

1.1.4 Kommutative Diagramme

Die Sprache der Kategorientheorie erlaubt es, über kommutative Diagramme in mathematischen Theorien zu sprechen. Kommutative Diagramme sind eine geschickte Beschreibung von Gleichungssystemen zwischen Verknüpfungen von Morphismen. Die Nützlichkeit dieses Formalismus haben wir bereits in der (Linearen) Algebra kennengelernt.

„Definition" 1.1.25 (kommutatives Diagramm)**.** Sei C eine Kategorie. Ein *kommutatives Diagramm in C* ist ein gerichteter Multigraph aus Objekten (als Knoten) und Morphismen (als Kanten) in C mit folgender Eigenschaft: Für je zwei gerichtete Wege zwischen denselben Start- und Endknoten stimmen die Verknüpfungen der zugehörigen Morphismen überein.

Beispiel 1.1.26 (kommutatives Diagramm)**.** Sei C eine Kategorie. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Z \end{array}$$

aus Objekten und Morphismen in C ist genau dann kommutativ, wenn

$$f \circ i = g \circ j.$$

Genauer kann man dies wie folgt formalisieren: Ein *gerichteter Multigraph* ist ein Quadrupel (V, E, s, t) bestehend aus Mengen V und E und Abbildungen $s\colon E \longrightarrow V$ und $t\colon E \longrightarrow V$. Dies beruht auf der folgenden Anschauung: Die Elemente von V repräsentieren die Knoten, die Elemente von E die Kanten, die Abbildungen s (source) bzw. t (target) spezifizieren den Start- bzw. Endknoten der Kanten. Sind $v, w \in V$, so ist ein *gerichteter Weg* eine endliche Folge $(e_1, \ldots, e_k)$ in E mit

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,k-1\}} \quad t(e_j) = s(e_{j+1})$$

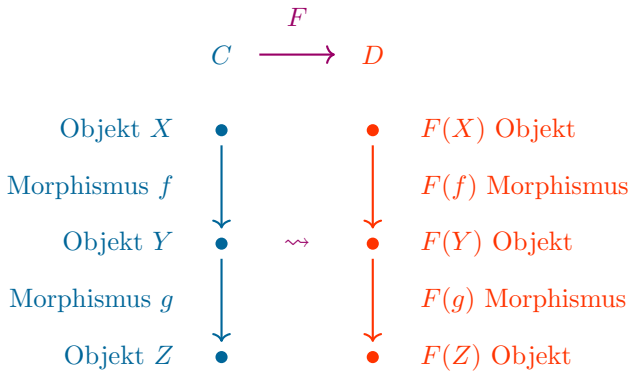


Abbildung 1.1.: Funktor, schematisch

(d.h., dass die End- und Startknoten aufeinanderfolgender Kanten zusammenpassen).

Definition 1.1.27 (kommutatives Diagramm)**.** Sei C eine Kategorie. Ein *kommutatives Diagramm in* C ist ein Tripel (Γ, F, f) bestehend aus

- einem gerichteten Multigraphen $\Gamma := (V, E, s, t)$,
- einer Abbildung $F\colon V \longrightarrow \mathrm{Ob}(C)$,
- einer Abbildung $f\colon E \longrightarrow \mathrm{Mor}(C)$ (in die Klasse aller Morphismen von C) mit
$$\forall_{e\in E} \quad f \in \mathrm{Mor}_C\big(F(s(e)), F(t(e))\big),$$

mit folgender Eigenschaft: Sind $(e_1, \ldots, e_k)$ und $(e'_1, \ldots, e'_{k'})$ gerichtete Wege in Γ mit denselben Start- und Endknoten, so gilt

$$f(e_k) \circ f(e_{k-1}) \circ \cdots \circ f(e_1) = f(e'_{k'}) \circ f(e'_{k'-1}) \circ \cdots \circ f(e'_1).$$

1.2 Funktoren

Die Übersetzung zwischen mathematischen Theorien (d.h. zwischen Kategorien) erfolgt durch sogenannte Funktoren. Grob gesagt handelt es sich dabei um „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien“ (Abbildung 1.1). Funktoren werden mithilfe von natürlichen Transformationen verglichen (Kapitl 1.3). Diese Hilfsmittel ermöglichen es zum Beispiel, den Begriff „natürlicher Isomorphismus“ zu präzisieren.

1.2.1 Funktoren

Definition 1.2.1 (Funktor)**.** Seien C und D Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:

- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_D\big(F(X), F(Y)\big).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,Z)$ gilt

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Ein *kontravarianter Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:

- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_D\big(F(Y), F(X)\big).$$

  („Die Pfeile werden also umgedreht.“)

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,Z)$ gilt

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Bemerkung 1.2.2 (die duale Kategorie)**.** Die Analogie zwischen ko- und kontravarianten Funktoren lässt sich mithilfe der dualen Kategorie effizient beschreiben: Die duale Kategorie einer Kategorie entsteht einfach durch ein abstraktes „Umdrehen der Pfeile“. Sei C eine Kategorie. Die *duale Kategorie* C^{op} ist wie folgt definiert:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(C)$.

- Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(C)$ sei („Umdrehen“)

$$\mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \mathrm{Mor}_C(Y, X).$$

- Verknüpfungen: Für alle Objekte $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}})$ betrachten wir die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto f \circ g; \end{aligned}$$

  dabei bezeichnet „$\circ$“ die entsprechende Verknüpfung in C.

Sind C und D Kategorien, so sind kontravariante Funktoren $C \longrightarrow D$ nichts anderes als kovariante Funktoren $C \longrightarrow D^{\mathrm{op}}$.

Beispiel 1.2.3 (Identitätsfunktor)**.** Sei C eine Kategorie. Dann ist der *Identitätsfunktor* $\mathrm{Id}_C \colon C \longrightarrow C$ wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(C) \\ X &\longmapsto X. \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.4 (Vergissfunktor)**.** Der *Vergissfunktor* $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung $\mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$, die einem $\mathbb{R}$-Vektorraum die unterliegende Menge zuordnet.

- Auf Morphismen: Für alle $\mathbb{R}$-Vektorräume X, Y betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Analog erhält man Vergissfunktoren $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, ...

Beispiel 1.2.5 (basierte Vektorräume)**.** Man kann die Mengenlehre über den folgenden Funktor $F \colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ in die lineare Algebra übersetzen:

- Auf Objekten definieren wir

$$F\colon \operatorname{Ob}(\mathsf{Set}) \longrightarrow \operatorname{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})$$
$$X \longmapsto \bigoplus_X \mathbb{R}.$$

Wir betrachten dabei eine Menge X in kanonischer Weise als Teilmenge, bzw. sogar Basis, von $\bigoplus_X \mathbb{R}$.

- Auf Morphismen definieren wir F wie folgt: Sind X, Y Mengen und ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so definieren wir $F(f)\colon \bigoplus_X \mathbb{R} \longrightarrow \bigoplus_Y \mathbb{R}$ als die eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die f von der Basis X auf ganz $\bigoplus_X \mathbb{R}$ fortsetzt.

Dies liefert tatsächlich einen Funktor.

Ein großer Teil der Linearen Algebra I lässt sich wie folgt zusammenfassen: Für alle Mengen X und alle $\mathbb{R}$-Vektorräume V ist

$$\operatorname{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}\big(F(X), V\big) \longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, V)$$
$$f \longrightarrow f|_X$$

eine Bijektion (universelle Eigenschaft von Basen). Dies zeigt, dass der Funktor F und der Vergissfunktor $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ sogenannte zueinander adjungierte Funktoren sind (Proposition 1.4.14).

Eine wesentliche Eigenschaft von (kovarianten wie kontravarianten) Funktoren ist, dass sie – da sie mit Verknüpfungen und Identitätsmorphismen verträglich sind – kommutative Diagramme in kommutative Diagramme überführen. Insbesondere erhalten Funktoren Isomorphie und liefern somit ein geeignetes Konzept für Invarianten:

Proposition 1.2.6 (Funktoren erhalten Isomorphie)**.** *Seien C, D Kategorien, sei $F\colon C \longrightarrow D$ ein [kontravarianter] Funktor und seien $X, Y \in \operatorname{Ob}(C)$.*

1. *Ist $f \in \operatorname{Mor}_C(X, Y)$ ein Isomorphismus in C, so ist der übersetzte Morphismus $F(f) \in \operatorname{Mor}_D(F(X), F(Y))$ [bzw. $F(f) \in \operatorname{Mor}_D(F(Y), F(X))$ im kontravarianten Fall] ein Isomorphismus in D.*

2. *Insbesondere: Ist $X \cong_C Y$, so folgt $F(X) \cong_D F(Y)$. Bzw.: Ist $F(X) \ncong_D F(Y)$, so ist $X \ncong_C Y$.*

Beweis. Der erste Teil folgt direkt aus den definierenden Eigenschaften von Funktoren: Da f ein Isomorphismus ist, gibt es einen Morphismus $g \in \operatorname{Mor}_C(Y, X)$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y\,.$$

Also ist

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$

und analog auch $F(f) \circ F(g) = \mathrm{id}_{F(Y)}$. Somit ist $F(f)$ ein Isomorphismus von $F(X)$ nach $F(Y)$ in D.

Den kontravarianten Fall erhält man mithilfe der dualen Kategorie aus dem kovarianten Fall. Der zweite Teil ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Teil. □

Geeignete Funktoren können also helfen zu zeigen, dass gewisse Objekte *nicht* isomorph sind.

Caveat 1.2.7. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. Objekte, die unter einem Funktor auf isomorphe Objekte abgebildet werden, sind im allgemeinen *nicht* isomorph.

1.2.2 Wiederholung: Dualräume

Eine wichtige Klasse von Funktoren sind Funktoren, die durch das Bilden von Morphismenmengen entstehen; ein klassisches Beispiel aus der Linearen Algebra sind die Dualräume.

Beispiel 1.2.8 (Dualraum)**.** Man kann die Konstruktion des Dualraums als kontravarianten Funktor $\cdot^* \colon \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ auffassen:

- Auf Objekten verwenden wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) \\ X &\longmapsto X^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle $\mathbb{R}$-Vektorräume X, Y betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(Y^*, X^*) \\ f &\longmapsto f^* = (g \mapsto g \circ f). \end{aligned}$$

Allgemeiner liefern Objekte in Kategorien Funktoren, die beschreiben wie die entsprechende Kategorie aus dem Blickwinkel dieses Objekts aussieht:

Beispiel 1.2.9 (dargestellte Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann erhalten wir einen kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set},$$

den *von X dargestellten kontravarianten Funktor*. Dieser Funktor ist wie folgt definiert:

- Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X) \colon \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}) \\ Y &\longmapsto \mathrm{Mor}_C(Y, X). \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Sind $Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$, so definieren wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon\ \mathrm{Mor}_C(Y,Z) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}\big(\mathrm{Mor}_C(Z,X), \mathrm{Mor}_C(Y,X)\big)\\ f &\longmapsto (g \mapsto g \circ f).\end{aligned}$$

Analog erhält man einen kovarianten Funktor $\mathrm{Mor}_C(X, \,\cdot\,)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$.

Im Falle von algebraischen Theorien haben die Morphismenmengen oft zusätzliche Struktur; duale Vektorräume sind nicht nur Mengen, sondern in kanonischer Weise Vektorräume. Wir betrachten dies für Moduln etwas genauer:

Beispiel 1.2.10 (Hom-Funktoren)**.** Wir beginnen mit der folgenden Vorüberlegung: Seien R, S, T ninoko Ringe. Ist V ein (R,S)-Bimodul und W ein (R,T)-Bimodul, so ist $M := \mathrm{Mor}_{R\mathsf{Mod}}(V,W)$ ein (S,T)-Bimodul bezüglich den folgenden Skalarmultiplikationen (nachrechnen):

$$\begin{aligned}S \times M &\longrightarrow M\\ (s,f) &\longmapsto \big(v \mapsto f(v \cdot s)\big)\\ M \times T &\longrightarrow M\\ (f,t) &\longmapsto \big(v \mapsto f(v) \cdot t\big).\end{aligned}$$

Eine R-Modulstruktur bleibt dabei im nicht-kommutativen Fall im allgemeinen *nicht* erhalten. Man beachte dabei, dass Rechtsskalarmultiplikationen *im Argument* zu Linksskalarmultiplikationen auf dem Abbildungsraum werden (und umgekehrt): Für alle $s, s' \in S$, alle $f \in M$ und alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\big((s \cdot s')f\cdot\big)(v) = f\big(v \cdot (s \cdot s')\big) &= f\big((v \cdot s) \cdot s'\big) = (s' \cdot f)(v \cdot s)\\ &= \big(s \cdot (s' \cdot f)\big)(v).\end{aligned}$$

Skalarmultiplikationen *auf den Werten* behalten jedoch ihre Händigkeit. Auf diese Weise erhalten wir somit Funktoren (nachrechnen)

$$\begin{aligned}{}_R\mathrm{Hom}(V, \,\cdot\,) := \mathrm{Mor}_{R\mathsf{Mod}}(V, \,\cdot\,)\colon {}_R\mathsf{Mod}_T &\longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}_T \qquad \text{(kovariant)}\\ {}_R\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, W) := \mathrm{Mor}_{R\mathsf{Mod}}(\,\cdot\,, W)\colon {}_R\mathsf{Mod}_S &\longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}_T\,. \quad \text{(kontravariant)}\end{aligned}$$

Ist R kommutativ, so vereinfacht sich die Lage, da jeder R-Linksmodul bereits in kanonischer Weise ein (R,R)-Bimodul ist; daher erhalten wir dann für alle R-Moduln V und W wie gewohnt Funktoren

$$\begin{aligned}{}_R\mathrm{Hom}(V, \,\cdot\,)\colon {}_R\mathsf{Mod} &\longrightarrow {}_R\mathsf{Mod} \qquad \text{(kovariant)}\\ {}_R\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, W)\colon {}_R\mathsf{Mod} &\longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}\,. \qquad \text{(kontravariant)}\end{aligned}$$

Wir geben ein erstes, einfaches, Beispiel für die Nützlichkeit von Hom-Funktoren in der Linearen Algebra:

Beispiel 1.2.11 (Rang freier Moduln)**.** Sei R ein Hauptidealring (zum Beispiel $\mathbb{Z}$) und seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $R^m \cong_R R^n$. Dann ist $m = n$ (Proposition II.2.5.13). Wir geben nun einen Beweis dieser Aussage, der nicht auf dem Elementarteilersatz, sondern auf einem geeigneten Funktor basiert (und für alle Integritätsringe funktioniert): Dem allgemeinen Invarianzprinzip durch Funktoren folgend, verwenden wir dazu einen geeigneten Funktor in eine Kategorie, die wir besser verstehen (in diesem Falle Vektorräume):

Sei Q der Quotientenkörper von R (ist $R = \mathbb{Z}$, so ist $Q = \mathbb{Q}$). Wir betrachten dann den Funktor

$$F := {}_R\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, Q)\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_Q\mathsf{Mod} = \mathsf{Vect}_Q\,.$$

Die universelle Eigenschaft freier Moduln zeigt dann, dass $F(R^m)$ isomorph (als Q-Vektorraum) zu Q^m ist. Da Funktoren Isomorphie erhalten (Proposition 1.2.6), erhalten wir insgesamt

$$Q^m \cong_Q F(R^m) \cong_Q F(R^n) \cong Q^n,$$

und damit (mithilfe der Invarianz der Vektorraumdimension $\dim_Q$ über dem *Körper* Q), dass $m = n$.

Mithilfe geeigneter Restklassenkörper kann man dieses Argument auch so verallgemeinern, dass es für alle kommutativen Ringe funktioniert. Verwendet man statt Hom-Funktoren das Tensorprodukt, so kann man auch den Fall unendlicher Ränge behandeln.

Ausblick 1.2.12 (Analysis auf Mannigfaltigkeiten)**.** Sei C^∞ die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten und glatten Abbildungen. Das Studium glatter Funktionen nach $\mathbb{R}$ auf glatten Mannigfaltigkeiten ist dann das Studium des von $\mathbb{R}$ dargestellten kontravarianten Funktors

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^\infty}(\,\cdot\,, \mathbb{R})\colon \mathsf{C}^\infty \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\,.$$

1.3 Natürliche Transformationen

Funktoren lassen sich mithilfe von natürlichen Transformationen vergleichen; natürliche Transformationen sind „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Funktoren“. Dies liefert eine Formalisierung des Konzepts von natürlichen Isomorphismen.

1.3.1 Natürliche Transformationen

Definition 1.3.1 (natürliche Transformation, natürlicher Isomorphismus)**.** Seien C, D Kategorien und seien $F, G\colon C \longrightarrow D$ Funktoren.

- Eine *natürliche Transformation T von F nach G*, kurz $T\colon F \Longrightarrow G$, ist eine Familie $\big(T(X) \in \mathrm{Mor}_D(F(X), G(X))\big)_{X\in \mathrm{Ob}(C)}$ von Morphismen, so dass für alle Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle(!) Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ die Gleichung

$$G(f) \circ T(X) = T(Y) \circ F(f)$$

in D gilt – d.h., dass folgende Diagramme in D kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle T(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(Y)} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array}$$

- Ein *natürlicher Isomorphismus* ist eine natürliche Transformation, die objektweise aus Isomorphismen besteht (äquivalent ist die Existenz einer objektweise inversen natürlichen Transformation).

Analog definieren wir diese Begriffe auch für kontravariante Funktoren.

Anmerkung zum Lernen. Die Definition natürlicher Transformationen kann man sich leicht merken: Aus den Vorlesungen zur (Linearen) Algebra ist man bereits mit „natürlichen Isomorphismen“ vertraut. Natürliche Isomorphismen bekommen außer Objekten keine weiteren Daten. Damit ist klar, was für eine Art Familie natürliche Transformationen sein müssen. Außerdem soll Natürlichkeit eine Verträglichkeit mit Morphismen beinhalten. Die einzig sinnvolle Beziehung, die man mit so wenig Daten überhaupt formulieren kann, ist die im obigen kommutative Diagramm dargestellte. Fertig!

Bemerkung 1.3.2 (natürlich)**.** Das Attribut „natürlich“ wird auf zwei, miteinander verwandte, Weisen verwendet: Einerseits als Hinweis darauf, dass etwas funktoriell ist; und andererseits als Hinweis darauf, dass etwas auf einer natürlichen Transformation beruht.

Beispiel 1.3.3 (dargestellte Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie, seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und sei $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Mor}_C(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, Z) \\ g \longmapsto g \circ f \end{pmatrix}_{Z\in \mathrm{Ob}(C)}$$

eine natürliche Transformation $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot\,) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$.

Mithilfe des Yoneda-Lemmas lässt sich zeigen, dass alle natürlichen Transformationen $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot\,) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$ von dieser Form sind. Wir werden eine abgeschwächte Aussage dieser Art in Proposition 1.3.6 zeigen.

Beispiel 1.3.4 (Doppeldual)**.** Wir betrachten einerseits den Identitätsfunktor

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}} \colon \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$$

und andererseits den Doppeldualfunktor

$$D := \cdot^{**} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\cdot\,, \mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \colon \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\,.$$

Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so definieren wir die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T(V) \colon V &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ v &\longmapsto \big(f \mapsto f(v)\big). \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $(T(V))_{V \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})}$ eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}} \Longrightarrow D$ ist. Eingeschränkt auf die Kategorie der endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume ist dies sogar ein natürlicher Isomorphismus.

Für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V gilt $V \cong_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$; man beachte jedoch, dass es *keinen* natürlichen Isomorphismus dieser Form gibt! (nachrechnen)

1.3.2 Darstellbare Funktoren

Dargestellte Funktoren treten auf natürliche Weise auf und haben viele angenehme Eigenschaften (zum Beispiel Verträglichkeit mit vielen Konstruktionen; Bemerkung 1.4.12). Diese Eigenschaften bleiben unter natürlicher Isomorphie erhalten; daher führt man den folgenden Begriff ein:

Definition 1.3.5 (darstellbarer Funktor)**.** Sei C eine Kategorie und sei $F \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ ein Funktor. Der Funktor F ist *darstellbar*, wenn es ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(C)$ gibt, so dass F und $\mathrm{Mor}_C(X, \cdot) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ natürlich isomorph sind. Man bezeichnet dann X als ein *darstellendes Objekt für* F.

Analog definiert man darstellbare kontravariante Funktoren.

Die darstellenden Objekte eines darstellbaren Funktors sind bis auf Isomorphie eindeutig durch den Funktor bestimmt:

Proposition 1.3.6 (Mini-Yoneda-Lemma)**.** *Sei C eine Kategorie und seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gilt $X \cong_C Y$.*
2. *Die Funktoren $\mathrm{Mor}_C(X, \cdot)$, $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ sind natürlich isomorph.*
3. *Die Funktoren $\mathrm{Mor}_C(\cdot\,, X)$, $\mathrm{Mor}_C(\cdot\,, Y) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ sind natürlich isomorph.*

Beweis. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Zueinander inverse Isomorphismen zwischen X und Y liefern mithilfe der Konstruktion in Beispiel 1.3.3 zueinander inverse natürliche Transformationen zwischen $\mathrm{Mor}_C(X, \cdot)$ und $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot)$.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1. Sei umgekehrt $T\colon F := \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_C(Y, \cdot\,) =: G$ ein natürlicher Isomorphismus. Um zu zeigen, dass X und Y in C isomorph sind, benötigen wir Morphismen von X nach Y und umgekehrt. Da die Situation so allgemein ist, gibt es gar nicht viele Bausteine, die dafür infragekommen: nur T und die Identitätsmorphismen. Sei (man beachte dabei, dass $T(Y)$ bijektiv ist)

$$\begin{aligned} g &:= T(X)(\mathrm{id}_X) \in \mathrm{Mor}_C(Y, X) \\ f &:= T(Y)^{-1}(\mathrm{id}_Y) \in \mathrm{Mor}_C(X, Y). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass f und g zueinander inverse Isomorphismen sind. Es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$, denn: Dazu wollen wir das kommutative Diagramm aus der Definition natürlicher Transformationen ins Spiel bringen. Worauf können wir dieses Diagramm anwenden? Nach Definition von $F := \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$ ist

$$g \circ f = F(g)(f).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T(X)(g \circ f) &= T(X)\big(F(g)(f)\big) \\ &= T(X) \circ F(g)(f) \\ &= G(g) \circ T(Y)(f) \quad \text{(da } T \text{ eine natürliche Transformation ist)} \\ &= G(g)\big(T(Y)(f)\big) \\ &= G(g)(\mathrm{id}_Y) \qquad\qquad \text{(Konstruktion von } f\text{)} \\ &= g \circ \mathrm{id}_Y \\ &= g \\ &= T(X)(\mathrm{id}_X). \qquad\qquad \text{(Konstruktion von } g\text{)} \end{aligned}$$

Da $T(X)$ bijektiv ist, folgt hieraus $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Analog (oder über den inversen natürlichen Isomorphismus) zeigt man, dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ist. Also bezeugen f und g, dass $X \cong_C Y$ gilt.

Zu 1. $\Longleftrightarrow$ 3. Dies zeigt man analog zur Äquivalenz der ersten beiden Aussagen (nachrechnen). □

Ausblick 1.3.7 (Zusatzstruktur auf darstellbaren Funktoren)**.** Zusatzstrukturen auf darstellenden Objekten (ausgedrückt durch geeignete Morphismen) spiegeln Zusatzstrukturen auf den zugehörigen darstellbaren Funktoren wider: Ist C eine Kategorie und $F\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ ein darstellbarer Funktor, so faktorisiert F genau dann über den Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$, wenn die darstellenden Objekte von F sogenannte Kogruppenobjekte in C sind. Diese Tatsache wird bei der Konstruktion vieler gruppenwertiger Invarianten verwendet (zum Beispiel sind die Homotopie*gruppen* in der algebraischen Topologie von dieser Form).

1.4 (Ko)Limiten

Bei der Klassifikation algebraischer Strukturen (zum Beispiel der Vektorräume, der endlich erzeugten abelschen Gruppen, der endlichen Gruppen, ...) versuchen wir algebraische Objekte in einfachere Bausteine zu zerlegen (zum Beispiel durch Quotienten oder Zerlegung in direkte Summen/Produkte). Wir haben dabei bereits festgestellt, dass viele dieser Konstruktionen effizient durch universelle Eigenschaften beschrieben und behandelt werden können.

Wir geben nun einen allgemeinen Rahmen für solche universellen Eigenschaften, mithilfe von (Ko)Limiten in Kategorien.

1.4.1 (Ko)Limiten

Direkte Summen und Quotienten werden durch Morphismen *heraus*, direkte Produkte durch Morphismen *hinein* charakterisiert. Dies ist auch die Grundidee für (Ko)Limiten in Kategorien. Wir lassen jedoch auch etwas kompliziertere Morphismensysteme (indiziert durch partiell geordnete Mengen) zu:

Definition 1.4.1 (partiell geordnete Menge)**.** Eine *partiell geordnete Menge* ist ein Paar $(I, \leq)$, bestehend aus einer Menge I und einer Relation „$\leq$“ auf I, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Manchmal schreiben wir auch (etwas schlampig) nur I für das Paar $(I, \leq)$.

Beispiel 1.4.2 (partiell geordnete Mengen)**.** Die folgenden partiellen Ordnungen sind in Abbildung 1.2 illustriert.

- *Diskrete Ordnungen.* Ist I eine Menge und ist „$\leq$“ die diskrete partielle Ordnung auf I, definiert durch

  $$\forall_{i,j\in I} \quad i \leq j \iff i = j,$$

  so ist $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

- *Total geordnete Mengen.* Jede total geordnete Menge ist eine partiell geordnete Menge. Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ ist *total geordnet*, wenn

  $$\forall_{i,j\in I} \quad i \leq j \vee j \leq i$$

  gilt. Zum Beispiel ist $\mathbb{N}$ bezüglich der gewöhnlichen Anordnungsrelation total geordnet.

- *Eine kleine partielle Ordnung.* Die Menge $\{0, 1, 2\}$ ist partiell geordnet bezüglich der Relation

  $$\big\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2)\big\}.$$

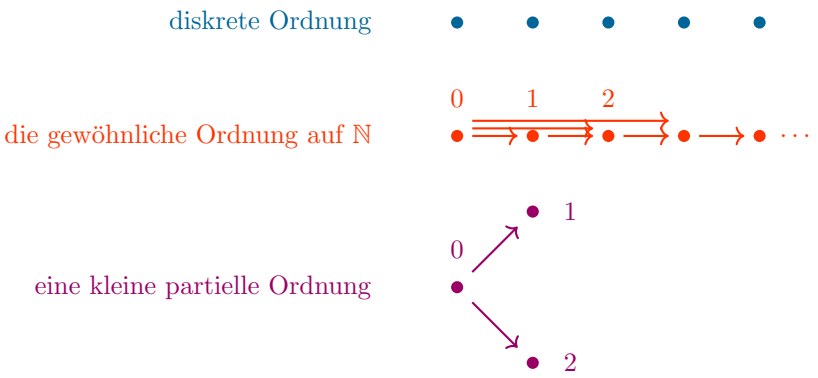


Abbildung 1.2.: Partiell geordnete Mengen; die Pfeile stehen dabei für „ist echt kleiner als“.

Definition 1.4.3 (Diagramm, Kolimes, inverser Limes)**.** Sei C eine Kategorie und $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

- Ein *I-Diagramm in C* ist ein Paar $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ bestehend aus Objekten X_i und Morphismen $f_{i,j} \in \mathrm{Mor}_C(X_i, X_j)$ mit

$$\begin{aligned} \forall_{i\in I} \quad & f_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i} \\ \forall_{i,j,k\in I} \quad & (i \leq j \wedge j \leq k) \Longrightarrow f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}. \end{aligned}$$

- Ein *Kolimes* eines I-Diagramms $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ist ein Paar $\big(X, (f_i)_{i\in I}\big)$, bestehend aus einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(C)$ und Morphismen $f_i \in \mathrm{Mor}_C(X_i, X)$ mit folgender universeller Eigenschaft (Abbildung 1.3):
  - Für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ gilt

$$f_j \circ f_{i,j} = f_i.$$

  - Für jedes Objekt $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und jede Familie $(g_i)_{i\in I}$ von Morphismen $g_i \in \mathrm{Mor}_C(X_i, Y)$ mit

$$\forall_{i,j\in I} \quad i \leq j \Longrightarrow g_j \circ f_{i,j} = g_i$$

    gibt es genau einen Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ mit

$$\forall_{i\in I} \quad g \circ f_i = g_i.$$

  Wir schreiben in diesem Fall auch kurz (und schlampig) $X = \varinjlim_{i\in I} X_i$.

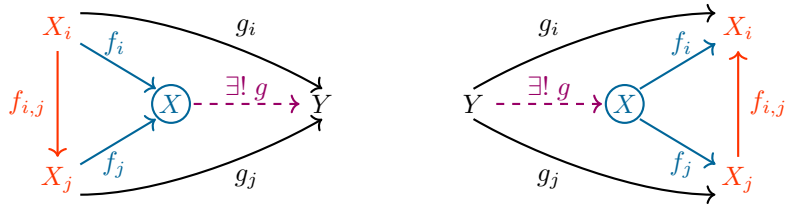


Abbildung 1.3.: Kolimes und inverser Limes, schematisch

Dual dazu definieren wir *inverse Diagramme* und *inverse Limiten* (charakterisiert durch Morphismen *hinein*). Genauer:

- Ein *inverses I-Diagramm in C* ist ein Paar $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ bestehend aus Objekten X_i und Morphismen $f_{i,j} \in \mathrm{Mor}_C(X_j, X_i)$ mit

$$\begin{aligned} \forall_{i\in I} \quad & f_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i} \\ \forall_{i,j,k\in I} \quad & (i \leq j \wedge j \leq k) \Longrightarrow f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}. \end{aligned}$$

- Ein *inverser Limes* eines inversen I-Diagramms $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ist ein Paar $\big(X, (f_i)_{i\in I}\big)$, bestehend aus einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(C)$ und Morphismen $f_i \in \mathrm{Mor}_C(X, X_i)$ mit folgender universeller Eigenschaft (Abbildung 1.3):
  - Für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ gilt $f_{i,j} \circ f_j = f_i$.
  - Für jedes Objekt $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und jede Familie $(g_i)_{i\in I}$ von Morphismen $g_i \in \mathrm{Mor}_C(Y, X_i)$ mit

$$\forall_{i,j\in I} \quad i \leq j \Longrightarrow f_{i,j} \circ g_j = g_i$$

    gibt es genau einen Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ mit

$$\forall_{i\in I} \quad f_i \circ g = g_i.$$

  Wir schreiben in diesem Fall auch kurz (und schlampig) $X = \varprojlim_{i\in I} X_i$.

Caveat 1.4.4 (Limes-Namen)**.** Für die Bezeichnung von Limiten gibt es viele verschiedene Konventionen (von denen manche nur in bestimmten Situationen eingesetzt werden):

$\varinjlim$	$\varprojlim$
Kolimes	Limes
induktiver Limes	projektiver Limes
gerichteter Limes	inverser Limes

Um Missverständnisse zu minimieren, werden wir die Bezeichnungen Kolimes und inverser Limes für die beiden Limesvarianten verwenden.

Caveat 1.4.5 (Existenz?!)**.** Im allgemeinen gibt es *nicht* in jeder Kategorie alle Kolimiten bzw. inversen Limiten. Zum Beispiel existieren in der Kategorie der endlichen Mengen *nicht* alle Kolimiten und *nicht* alle inversen Limiten.

(Ko)Limiten sind (falls existent) im folgenden Sinne eindeutig bestimmt:

Proposition 1.4.6 (Eindeutigkeit von (Ko)Limiten)**.** *Sei C eine Kategorie und sei $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.*

1. *Sei $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ein I-Diagramm in C. Sind $(X, (f_i)_{i\in I})$ und $(Y, (g_i)_{i\in I})$ Kolimiten dieses Diagramms, so gibt es genau einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ mit*

$$\forall_{i\in I} \quad f \circ f_i = g_i.$$

2. *Sei $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ein inverses I-Diagramm in der Kategorie C. Sind $(X, (f_i)_{i\in I})$ und $(Y, (g_i)_{i\in I})$ inverse Limiten dieses Diagramms, so gibt es genau einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ mit*

$$\forall_{i\in I} \quad g_i \circ f = f_i.$$

Beweis. Dies folgt aus dem Standard-Argument für universelle Eigenschaften („Brüderchen, komm tanz mit mir“, Satz II.2.3.24), indem man

- den Existenzteil der universellen Eigenschaft verwendet, um Morphismen in beide Richtungen zu konstruieren,
- und den Eindeutigkeitsteil der universellen Eigenschaft verwendet, um zu zeigen, dass beide Kompositionen mit der Identität übereinstimmen müssen (da sie dasselbe Abbildungsproblem lösen).

Genauer geht man im Kolimes-Fall wie folgt vor:

- *„einmal hin“:* Da $(X, (f_i)_{i\in I})$ die universelle Eigenschaft des Kolimes erfüllt und die $(g_i)_{i\in I}$ kompatibel sind, gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ mit

$$\forall_{i\in I} \quad f \circ f_i = g_i.$$

- *„einmal her“:* Da $(Y, (g_i)_{i\in I})$ die universelle Eigenschaft des Kolimes erfüllt und die $(f_i)_{i\in I}$ kompatibel sind, gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ mit

$$\forall_{i\in I} \quad g \circ g_i = f_i.$$

- *„rundherum, das ist nicht schwer“:* Nach Konstruktion gilt

$$\forall_{i\in I} \quad (g\circ f)\circ f_i = g\circ(f\circ f_i) = g\circ g_i = f_i = \mathrm{id}_X \circ f_i.$$

  Wenden wir die Eindeutigkeitsaussage aus der universellen Eigenschaft darauf an, so erhalten wir

$$g\circ f = \mathrm{id}_X\,.$$

  Analog folgt $f\circ g = \mathrm{id}_Y$.

Insbesondere sind f und g zueinander inverse Isomorphismen. □

1.4.2 Alte Bekannte

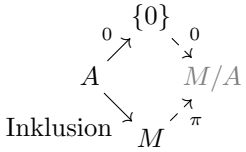
Aus dem Vergleich der entsprechenden universellen Eigenschaften erhält man aus der Eindeutigkeit von (Ko)Limiten (Proposition 1.4.6):

Beispiel 1.4.7 (Koprodukt/direkte Summe)**.** Diagramme über diskrete Ordnungen sind nichts anderes als über die entsprechende Menge indizierte Familien von Objekten; Kolimiten über diskrete Ordnungen bezeichnet man auch als *Koprodukte*.

Sei R ein ninoko Ring und sei I eine Menge (mit der diskreten Ordnung). Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Linksmoduln (also ein I-Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$), so erfüllt die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen die universelle Eigenschaft des Koprodukts von $(M_i)_{i\in I}$ über I (Satz II.2.3.24).

Das Koprodukt in der Kategorie der Mengen ist durch die disjunkte Vereinigung (und die kanonischen Inklusionen) gegeben. Das Koprodukt in der Kategorie der Gruppen ist durch das sogenannte freie Produkt gegeben (dies ist außer in pathologischen Fällen *nicht* die direkte Summe von Gruppen!).

Beispiel 1.4.8 (Quotienten)**.** Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Linksmodul und sei $A \subset M$ ein R-Linksuntermodul. Dann erfüllt M/A zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi\colon M \longrightarrow M/A$ (und dem Nullmorphismus) die universelle Eigenschaft des Kolimes über das folgende Diagramm (basierend auf der kleinen partiell geordneten Menge aus Beispiel 1.4.2):



Analog lassen sich auch Quotienten von Vektorräumen, Gruppen, etc. als Kolimiten beschreiben.

Beispiel 1.4.9 (Produkt)**.** Inverse Limiten über diskrete Ordnungen bezeichnet man auch als *Produkte*. Sei R ein ninoko Ring und sei I eine Menge mit der diskreten Ordnung. Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Linksmoduln, so erfüllt das direkte Produkt $\prod_{i\in I} M_i$ zusammen mit den kanonischen Projektionen die universelle Eigenschaft des Produkts von $(M_i)_{i\in I}$ über I.

Analog gilt dies auch in der Kategorie der Vektorräume über einem Grundkörper, der Kategorie der Gruppen und der Kategorie der Mengen.

Proposition 1.4.10 ((Ko)Limiten in Modulkategorien)**.** *Sei R ein ninoko Ring. Dann existieren in der Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ alle Kolimiten und alle inversen Limiten. Genauer gilt: Sei $(I,\leq)$ eine partiell geordnete Menge.*

1. Kolimiten. *Ist $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ein I-Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$, so ist*

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} X_i\Big) \,/\, N$$

mit

$$N := \operatorname{Span}_R\big\{\iota_i(x) - \iota_j\big(f_{i,j}(x)\big) \;\big|\; i,j\in I, i\leq j, x\in X_i\big\}$$

zusammen mit den von den kanonischen Inklusionen $(\iota_i)_{i\in I}$ in die direkte Summe induzierten Homomorphismen ein Kolimes dieses Diagramms in ${}_R\mathsf{Mod}$.

2. Inverse Limiten. *Ist $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ein inverses I-Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$, so ist*

$$\left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \;\middle|\; \forall_{i,j\in I} \quad i\leq j \Longrightarrow x_i = f_{i,j}(x_j)\right\} \subset \prod_{i\in I} X_i$$

zusammen mit den von den kanonischen Projektionen induzierten Homomorphismen ein inverser Limes dieses inversen Diagramms in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweis. Zu 1. Wir weisen nach, dass die universelle Eigenschaft des Kolimes über dieses Diagramm erfüllt ist, indem wir die universelle Eigenschaft der direkten Summe und von Quotienten kombinieren: Wir setzen $X := \big(\bigoplus_{i\in I} X_i\big)/N$ und zu $i\in I$ schreiben wir $f_i\colon X_i \longrightarrow X$ für den von der Inklusion ι_i der i-ten Komponente in die direkte Summe und der kanonischen Projektion induzierten Homomorphismus.

- Seien $i,j\in I$ mit $i\leq j$. Dann gilt wegen der Konstruktion von N für alle $x\in X_i$, dass

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \big[\iota_i(x)\big] = \big[\iota_i(x) - \iota_i(x) + \iota_j(f_{i,j}(x))\big] = \big[\iota_j\circ f_{i,j}(x)\big] \\ &= f_j\circ f_{i,j}(x). \end{aligned}$$

- Sei $Y\in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und sei $(g_i)_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen $g_i\in \operatorname{Mor}_C(X_i,Y)$ mit

$$\forall_{i,j\in I} \quad i \leq j \Longrightarrow g_j \circ f_{i,j} = g_i.$$

Dann gibt es genau einen R-Modulhomomorphismus $g\colon X \longrightarrow Y$ mit

$$\forall_{i\in I} \quad g \circ f_i = g_i,$$

denn: Wir betrachten den R-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \widetilde{g}\colon \bigoplus_{i\in I} X_i &\longrightarrow Y \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} g_i(x_i) \end{aligned}$$

(definiert über die universelle Eigenschaft der direkten Summe). Die Kompatibilitätsbedingung für $(g_i)_{i\in I}$ zeigt, dass $N \subset \ker \widetilde{g}$ (nachrechnen). Also induziert $\widetilde{g}$ einen wohldefinierten R-Modulhomomorphismus $g\colon X \longrightarrow Y$ (universelle Eigenschaft des Quotientenmoduls). Nach Konstruktion gilt dabei für alle $i \in I$ und alle $x \in X_i$

$$g \circ f_i(x) = g\big[\iota_i(x)\big] = \widetilde{g}\big(\iota_i(x)\big) = g_i(x).$$

Dies zeigt die Existenz von g. Die Eindeutigkeit von g folgt aus der Tatsache, dass X von $\bigcup_{i\in I} \operatorname{im} f_i$ erzeugt wird.

Zu 2. Dies kann man mit ähnlichen Argumenten wie im ersten Teil auf die Eigenschaften der Bausteine zurückführen (nachrechnen). □

Beispiel 1.4.11 (formale Potenzreihen)**.** Sei R ein Ring. Dann betrachten wir das inverse Diagramm

$$\big(R[T]/(T^n) \longrightarrow R[T]/(T^m)\big)_{n,m\in\mathbb{N},m\leq n}$$

über der total geordneten Menge $(\mathbb{N}, \leq)$, gegeben durch die kanonischen Projektionen. Der R-Modul

$$R[\![T]\!] := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} R[T]/(T^n)$$

erbt von den Restklassenringen $(R[T]/(T^n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ringstruktur (nachrechnen). Man bezeichnet diesen Ring als Ring der *formalen Potenzreihen über R*. Die konkrete Konstruktion in Proposition 1.4.10 zeigt, dass wir Elemente von $R[\![T]\!]$ als unter den kanonischen Projektionen kompatible Folgen von Polynomen in $R[T]$ auffassen können. Daher können wir uns Elemente von $R[\![T]\!]$ als Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot T^n$$

mit $a_n \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorstellen (und das Cauchy-Produkt stimmt mit dem Produkt auf $R[\![T]\!]$ überein).

Man beachte, dass es sich hierbei um „formale“ Potenzreihen handelt; d.h. es gibt keine Voraussetzungen an die Konvergenz (in welchem Sinne auch?!) der Koeffizienten. Insbesondere ist es *nicht* ohne weiteres möglich, in solche Potenzreihen Elemente aus R einzusetzen!

1.4.3 Verträglichkeit mit (Ko)Limiten

Möchte man produktiv mit algebraischen Objekten umgehen, so ist es unerlässlich, sich damit zu befassen, welche/inwieweit Konstruktionen mit Zerlegungen in kleinere Bausteine verträglich sind. In unserer kategorientheoretischen Sprache ist dies die Frage, welche Funktoren mit (Ko)Limiten verträglich sind.

Bemerkung 1.4.12 (darstellbare Funktoren und (Ko)Limiten)**.** Sei C eine Kategorie und sei $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Da die universellen Eigenschaften von (Ko)Limiten durch Abbildungsprobleme beschrieben werden, folgt (Übungsaufgabe):

1. Der Funktor $\mathrm{Mor}_C(X, \ \cdot\ )\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist mit inversen Limiten verträglich: Ist $Y := \varprojlim_{i\in I} X_i$ ein inverser Limes eines I-Diagramms in C, so erfüllt $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ zusammen mit den induzierten Morphismen die universelle Eigenschaft des inversen Limes $\varprojlim_{i\in I} \mathrm{Mor}_C(X, X_i)$ in Set.

   Da diese Eigenschaft unter natürlichen Isomorphismen erhalten bleibt (nachrechnen), sind kovariante darstellbare Funktoren $C \longrightarrow \mathsf{Set}$ mit inversen Limiten verträglich.

2. Der kontravariante Funktor $\mathrm{Mor}_C(\ \cdot\ , X)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ übersetzt Kolimiten in inverse Limiten. Also übersetzen kontravariante darstellbare Funktoren $C \longrightarrow \mathsf{Set}$ Kolimiten in inverse Limiten.

Analog folgen die entsprechenden Verträglichkeiten auch für Hom-Funktoren von Modulkategorien.

Beispiel 1.4.13 (Wozu?!)**.** Die Nützlichkeit von Überlegungen in der Art wie in Bemerkung 1.4.12 zeigt sich zum Beispiel auch in der Analysis: Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten (z.B. offene Teilmengen von euklidischen Vektorräumen), so kann man auch $M \times N$ in vernünftiger Weise mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit versehen. Was ist einfacher zu verstehen, $C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ oder $C^\infty(\mathbb{R}, M \times N)$?

An dieser Stelle ist es irreführend, über die analytischen Details der Definition glatter Strukturen auf M, N und $M \times N$, sowie die Definition glatter Abbildungen zwischen glatten Manngifaltigkeiten nachzudenken. Diese Frage lässt sich nämlich am einfachsten mit einem strukturellen, kategorientheoretischen, Blickwinkel beantworten: Die Mannigfaltigkeit $M \times N$ ist (zusammen mit den kanonischen Projektionen) das kategorientheoretische Produkt

von M und N in der Kategorie C^∞ der glatten Mannigfaltigkeiten. Somit ist klar, dass

$$C^\infty(\mathbb{R}, M \times N) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^\infty}(\mathbb{R}, M \times N)$$

durch die universelle Eigenschaft der Produkts (oder die Verträglichkeit von $\mathrm{Mor}_{\mathsf{C}^\infty}(\mathbb{R}, \cdot\,)$ mit inversen Limiten aus Bemerkung 1.4.12) kurz und bündig beschrieben wird.

Der Abbildungsraum $C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ hingegen ist schwieriger zu beschreiben (und führt zu Vervollständigungen von Tensorprodukten).

Die kategorielle Sichtweise erlaubt es in dieser Weise an vielen Stellen vorherzusagen, welche Aussagen „einfach“ und welche Aussagen „schwierig“ oder „erstaunlich“ sein sollten.

Proposition 1.4.14 (adjungierte Funktoren)**.** *Seien C und D Kategorien und seien $F\colon C \longrightarrow D$ und $G\colon D \longrightarrow C$ kovariante Funktoren, die im folgenden Sinne* adjungiert *sind:*

Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Mor}_D\big(F(\,\cdot\,),\,\cdot\,\big) \cong \mathrm{Mor}_C\big(\,\cdot\,, G(\,\cdot\,)\big)$$

(in zwei Variablen bzw. als Funktoren auf $C^{\mathrm{op}} \times D$; Bemerkung 1.4.15).

Dann ist F mit Kolimiten verträglich und G ist mit inversen Limiten verträglich.

Bemerkung 1.4.15. Die Natürlichkeitsbedingung in der Formulierung von Proposition 1.4.14 lautet wie folgt (das ist die einzig „sinnvolle“ überhaupt formulierbare Bedingung!): Es gibt eine Familie

$$\big(T(X,Y)\colon\ \mathrm{Mor}_D(F(X), Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, G(Y))\big)_{X \in \mathrm{Ob}(C), Y \in \mathrm{Ob}(D)}$$

von Bijektionen mit folgender Eigenschaft: Für alle $X, X' \in \mathrm{Ob}(C)$, $Y, Y' \in \mathrm{Ob}(D)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X', X)$ und $g \in \mathrm{Mor}_D(Y, Y')$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}_D(F(X), Y) & \xrightarrow{T(X,Y)} & \mathrm{Mor}_C(X, G(Y)) \\
{\scriptstyle \mathrm{Mor}_D(F(f),Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}_C(f,G(Y))} \\
\mathrm{Mor}_D(F(X'), Y) & & \mathrm{Mor}_C(X', G(Y)) \\
{\scriptstyle \mathrm{Mor}_D(F(X'),g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}_C(X',G(g))} \\
\mathrm{Mor}_D(F(X'), Y') & \xrightarrow[T(X',Y')]{} & \mathrm{Mor}_C(X', G(Y'))
\end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage für F (der Beweis für G verläuft dual dazu): Sei $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und sei $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ein I-Diagramm in C, das einen Kolimes in C besitzt. Mit der Adjunktion und Bemerkung 1.4.12 erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mor}_D\big(F(\varinjlim_{i\in I} X_i),\ \cdot\ \big) &\cong \mathrm{Mor}_C\big(\varinjlim_{i\in I} X_i, G(\ \cdot\ )\big) && \text{(Adjunktion)}\\
&\cong \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Mor}_C\big(X_i, G(\ \cdot\ )\big) && \text{(Bemerkung 1.4.12)}\\
&\cong \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Mor}_D\big(F(X_i),\ \cdot\ \big). && \text{(Adjunktion)}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber gerade, dass $F(\varinjlim_{i\in I} X_i)$ die universelle Eigenschaft des Kolimes von $\big((F(X_i))_{i\in I}, (F(f_{i,j}))_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ besitzt (nachrechnen).

Insbesondere existiert der Kolimes $\varinjlim_{i\in I} F(X_i)$ in D und die kanonischen Morphismen induzieren einen Isomorphismus

$$\varinjlim_{i\in I} F(X_i) \longrightarrow F\big(\varinjlim_{i\in I} X_i\big). \qquad \square$$

Anmerkung zum Lernen. Sie sollten versuchen, die Schritte des letzten Beweises (die ja stark komprimiert dargestellt sind) nochmal im Detail nachzuvollziehen!

Ein Beispiel für adjungierte Funktoren haben wir bereits in Beispiel 1.2.5 gesehen. Im nächsten Abschnitt werden wir ein weiteres kennenlernen.

1.5 Beispiel: Das Tensorprodukt

Im folgenden werden wir das Tensorprodukt für Moduln konstruieren, charakterisieren und mithilfe von kategorientheoretischen Argumenten genauer untersuchen. Insbesondere werden wir an diesem Beispiel sehen, wie die allgemeine Theorie in konkreten Beispielen Probleme lösen kann.

1.5.1 Wiederholung: Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Das Tensorprodukt von Vektorräumen ist eine Maschine, die multilineare Abbildungen in lineare Abbildungen verwandelt (Abbildung 1.4). Die Funktionalität dieser Maschine wird dabei kurz und knapp durch eine universelle Eigenschaft beschrieben (Satz II.4.1.5):

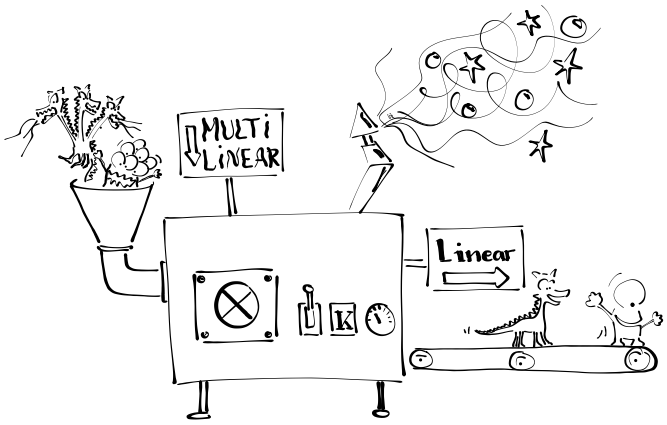


Abbildung 1.4.: Das Tensorprodukt als Maschine

Satz 1.5.1 (Tensorprodukt)**.** *Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K. Dann gibt es einen K-Vektorraum $V \otimes_K W$ und eine bilineare Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ mit folgender universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\otimes\colon V \otimes_K W \longrightarrow Z$ mit

$$f_\otimes \circ \otimes = f.$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f \text{ (bilinear)}} & Z \\ {\scriptstyle\otimes}\downarrow & \nearrow_{\exists!\, f_\otimes \text{ (linear)}} & \\ V \otimes_K W & & \end{array}$$

Der K-Vektorraum $V \otimes_K W$ und die Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ sind durch diese universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Man bezeichnet $V \otimes_K W$ als Tensorprodukt von V und W über K.

Außerdem haben wir bereits gesehen, dass das Tensorprodukt von Vektorräumen die folgenden Eigenschaften besitzt (Satz II.4.1.8):

- Neutralität des Grundkörpers
- Kommutativität
- Assoziativität
- Verträglichkeit mit direkten Summen
- Exponentialgesetz
- Funktorialität

Anmerkung zum Lernen. Können Sie sich noch an konkrete Anwendungen des Tensorprodukts von Vektorräumen erinnern? Falls nicht, sollten Sie diese nochmal wiederholen (Kapitel II.4.1.3). Das Tensorprodukt ist nämlich ein äußerst treuer Helfer in vielen Situationen!

1.5.2 Das Tensorprodukt

Wir verallgemeinern nun das Tensorprodukt auf Moduln über ninoko Ringen. Wichtigstes Designkriterium ist natürlich, dass eine geeignete universelle Eigenschaft erfüllt ist. Im nicht-kommutativen Fall ist dabei das folgende Phänomen zu berücksichtigen:

Caveat 1.5.2 (bilineare Abbildungen über ninoko Ringen)**.** Es ist verlockend, bilineare Abbildungen auch über ninoko Ringen zu betrachten. Naiv könnte das wie folgt aussehen: Sei R ein ninoko Ring und seien M, N, Z Linksmoduln über R. Eine Abbildung $f\colon M\times N \longrightarrow Z$ ist *R-bilinear*, wenn für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(m+m', n) &= f(m,n) + f(m',n) \\ f(m, n+n') &= f(m,n) + f(m,n') \\ f(r\cdot m, n) &= r \cdot f(m,n) \\ f(m, r\cdot n) &= r \cdot f(m,n) \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Ist $f\colon M \times N \longrightarrow Z$ eine solche R-bilineare Abbildung, so erhalten wir auch

$$\begin{aligned} (r\cdot s)\cdot f(m,n) &= r\cdot \big(s\cdot f(m,n)\big) = r\cdot f(m, s\cdot n) = f(r\cdot m, s\cdot n) \\ &= s\cdot f(r\cdot m, n) = s\cdot \big(r\cdot f(m,n)\big) \\ &= (s\cdot r)\cdot f(m,n), \end{aligned}$$

was im Falle eines nicht-kommutativen Rings R eine zu große Einschränkung darstellt.

Daher ist es naheliegend, Tensorprodukte nur zwischen einem Rechts- und einem Linksmodul zu definieren, und die Skalarmultiplikationsbedingung leicht abgeschwächt zu formulieren:

Definition 1.5.3 (balanciertes Produkt)**.** Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul, sei N ein R-Linksmodul und sei Z eine abelsche Gruppe.

- Eine Abbildung $f\colon M \times N \longrightarrow Z$ ist ein *R-balanciertes Produkt*, wenn für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(m+m',n) &= f(m,n) + f(m',n) \\ f(m,n+n') &= f(m,n) + f(m,n') \\ f(m\cdot r,n) &= f(m,r\cdot n) \end{aligned}$$

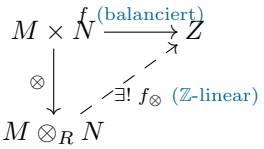
gelten.

- Wir schreiben $\mathrm{Bal}_R(M,N,Z)$ für die Menge aller R-balancierten Produkte $M\times N \longrightarrow Z$; diese Menge bildet bezüglich punktweiser Addition eine abelsche Gruppe.

Satz 1.5.4 (Tensorprodukt von Moduln)**.** *Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul und sei N ein R-Linksmodul. Dann gibt es eine abelsche Gruppe $M\otimes_R N$ und ein R-balanciertes Produkt $\otimes\colon M\times N \longrightarrow M\otimes_R N$ mit folgender universellen Eigenschaft:*

Für jede abelsche Gruppe Z und jedes R-balancierte Produkt $f\colon M\times N\longrightarrow Z$ gibt es genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f_\otimes\colon M\otimes_R N\longrightarrow Z$ mit

$$f_\otimes \circ \otimes = f.$$



Die abelsche Gruppe $M\otimes_R N$ und die Abbildung $\otimes\colon M\times N\longrightarrow M\otimes_R V$ sind durch diese universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Man bezeichnet $M\otimes_R N$ als Tensorprodukt von M und N über R.

Beweis. Die *Eindeutigkeit* folgt mit dem Standardargument; wir werden auch noch ein weiteres Argument dafür im Zusammenhang mit der Hom-Tensor-Adjunktion kennenlernen (Satz 1.5.10).

Die *Existenz* kann analog zum Vektorraumfall mit der folgenden Konstruktion nachgewiesen werden (Kapitel II.4.1.4): Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul

$$M\otimes_R N := \left(\bigoplus_{M\times N}\mathbb{Z}\right) \Big/ U,$$

wobei (zur Erzwingung der R-balancierten Interaktion!)

$$\begin{aligned} U := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\Big(&\{e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)} \mid m,m'\in M, n\in N\} \\ &\cup \{e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')} \mid m\in M, n,n'\in N\} \\ &\cup \{e_{(m\cdot r,n)} - e_{(m,r\cdot n)} \mid m\in M, n\in N, r\in R\}\Big). \end{aligned}$$

Zusätzlich definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes\colon M \times N &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (m,n) &\longmapsto [e_{(m,n)}]. \end{aligned}$$

Analog zum Vektorraumfall zeigt man mithilfe der universellen Eigenschaft von direkten Summen und Quotientenmoduln, dass diese Abbildung $\otimes$ ein R-balanciertes Produkt ist und dass $M \otimes_R N$ zusammen mit $\otimes$ die gewünschte universelle Eigenschaft erfüllt. □

Caveat 1.5.5 (Elementartensoren)**.** Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. Elemente der Form

$$m \otimes n := \otimes(m,n) \in M \otimes_R N$$

mit $m \in M$ und $n \in N$ bezeichnet man als *Elementartensoren*.

Da die Abbildung $\otimes\colon M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ im allgemeinen *nicht* surjektiv ist, sind *nicht* alle Elemente von $M \otimes_R N$ Elementartensoren, sondern $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Elementartensoren.

Ist $f\colon M \times N \longrightarrow Z$ ein R-balanciertes Produkt, so schreibt man normalerweise

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\longrightarrow Z \\ m \otimes n &\longmapsto f(m,n) \end{aligned}$$

für die induzierte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f_\otimes$ (obwohl ja nicht alle Elemente auf der linken Seite Elementartensoren sind ... aber wegen der Eindeutigkeit von $f_\otimes$ ist $f_\otimes$ durch diese Beschreibung eindeutig bestimmt).

Literaturaufgabe. Falls Ihnen entfallen sein sollte, wie man mit Elementartensoren und der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts korrekt umgeht, kann *Tensor Products* [4, S. 12] von K. Conrad weiterhelfen.

Beispiel 1.5.6 (Tensorprodukt)**.** Bevor wir uns weiter mit den Eigenschaften des Tensorprodukts auseinandersetzen, geben wir ein erstes Beispiel, das bereits eine der Eigenheiten des Tensorprodukts von Moduln zeigt: Es ist

$$\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \cong \{0\},$$

denn: Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt (wegen $2 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3$; da $\mathbb{Z}$ kommutativ ist, können wir die Unterscheidung in Rechts-/Linksmoduln ignorieren und arbeiten wie gewohnt mit der Skalarmultiplikation von Links)

$$\begin{aligned} [x] \otimes [y] &= [2 \cdot 2 \cdot x] \otimes [y] = \big(2 \cdot [2 \cdot x]\big) \otimes [y] \\ &= [2 \cdot x] \otimes \big(2 \cdot [y]\big) = [2 \cdot x] \otimes [0] \\ &= 0 \qquad\qquad \text{(nachrechnen!)} \end{aligned}$$

in $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$. Da dieses Tensorprodukt von Elementartensoren erzeugt wird, folgt $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \cong \{0\}$.

Statt mit Elementartensoren kann man selbstverständlich auch direkt mit der universellen Eigenschaft argumentieren: Ist Z eine abelsche Gruppe und $f\colon \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/2 \longrightarrow Z$ ein $\mathbb{Z}$-balanciertes Produkt, so folgt

$$f\big([x],[y]\big) = f\big(2\cdot[2\cdot x],[y]\big) = f\big([2\cdot x],2\cdot[y]\big) = f\big([2\cdot x],[0]\big) = 0.$$

Also ist $\mathrm{Bal}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3,\mathbb{Z}/2,Z) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$. Daher erfüllt $\{0\}$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$ bzw. $\mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

Bemerkung 1.5.7 (Funktorialität des Tensorprodukts)**.** Seien R und S ninoko Ringe.

- Sind M, M' Rechtsmoduln über R, sind N, N' Linksmoduln über R und sind $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$, $g \in {}_R\mathrm{Hom}(N,N')$, so ist

  $$\begin{aligned} f \otimes_R g\colon M \otimes_R N &\longrightarrow M' \otimes_R N' \\ m \otimes n &\longrightarrow f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

  eine wohldefinierte (nachrechnen!) $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung.

- Ist M ein R-Rechtsmodul, so erhalten wir auf diese Weise einen Funktor $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$:
  - Auf Objekten:

    $$\begin{aligned} \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Ab}) \\ N &\longmapsto M \otimes_R N \end{aligned}$$

  - Auf Morphismen: Sind N, N' Linksmoduln über R, so definieren wir

    $$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Hom}(N,N') &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, M \otimes_R N') \\ f &\longmapsto \mathrm{id}_M \otimes_R f. \end{aligned}$$

    Ist N ein R-Linksmodul, so liefert die analoge Konstruktion einen Funktor $\cdot \otimes_R N\colon \mathsf{Mod}_R \longrightarrow \mathsf{Ab}$.

Man beachte dabei: Ist M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul, so besitzt das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ im allgemeinen *keine* vernünftige R-Modulstruktur! Die R-Modulstrukturen wurden sozusagen „in der Mitte durch das Tensorprodukt aufgefressen“.

- Ist jedoch M ein (S,R)-Bimodul, so liefert

  $$\begin{aligned} S \times (M \otimes_R N) &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (s, m \otimes n) &\longmapsto (s \cdot m) \otimes n \end{aligned}$$

eine wohldefinierte S-Linksmodulstruktur auf $M \otimes_R N$ (nachrechnen). Auf diese Weise erhalten wir dann den *Basiswechselfunktor* (und analog für die andere Seite)

$$M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}\,.$$

- Insbesondere: Ist R kommutativ, so erhalten wir wie gewohnt für jeden R-Modul M einen Tensorproduktfunktor $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$.

Wir werden in den folgenden Kapiteln häufig, Basiswechselfunktoren per Tensorprodukt verwenden, um zu Moduln über einfacheren Ringen übergehen zu können.

Bemerkung 1.5.8 (Zusammenhang mit dem Tensorprodukt von Vektorräumen)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Ist Z ein K-Vektorraum, so ist jede K-bilineare Abbildung $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ auch eine K-balancierte Abbildung und die induzierte Abbildung $f_\otimes\colon V \otimes_K W \longrightarrow Z$ aus Satz 1.5.4 ist K-linear. Daher erfüllt die Konstruktion aus Satz 1.5.4 auch die universelle Eigenschaft des Vektorraumtensorprodukts. Mit der Eindeutigkeit des Vektorraumtensorprodukts folgt daher, dass das Modul-Tensorprodukt für Vektorräume mit dem Vektorraumtensorprodukt übereinstimmt.

Bemerkung 1.5.9 (Mini-Tensorprodukt-Baukasten)**.** Wie im Vektorraumfall, kann man mithilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts die folgenden Eigenschaften beweisen (nachrechnen; analog zu Satz II.4.1.8): Sei R ein ninoko Ring.

1. *Neutralität des Grundrings.* Ist S ein ninoko Ring und N ein (R,S)-Bimodul, so ist

$$\begin{aligned} R \otimes_R N &\longrightarrow N \\ r \otimes n &\longmapsto r \cdot n \end{aligned}$$

   ein wohldefinierter Isomorphismus von S-Rechtsmoduln.

2. *Assoziativität.* Seien S, T, U ninoko Ringe, sei M ein (R,S)-Bimodul, sei N ein (S,T)-Bimodul und sei P ein (T,U)-Linksmodul. Dann ist

$$\begin{aligned} (M \otimes_S N) \otimes_T P &\longrightarrow M \otimes_S (N \otimes_T P) \\ (m \otimes n) \otimes p &\longmapsto m \otimes (n \otimes p) \end{aligned}$$

   ein wohldefinierter Isomorphismus von (R,U)-Bimoduln.

3. *Kommutativität.* Ist R ein (kommutativer!) Ring und sind M und N Moduln über R, so ist

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\longrightarrow N \otimes_R M \\ m \otimes n &\longmapsto n \otimes m \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von R-Moduln. Man beachte, dass die analoge Aussage für ninoko Grundringe gar keinen Sinn ergibt!

1.5.3 Verträglichkeit mit Kolimiten

Die Kategorientheorie liefert uns einen einfachen Beweis dafür, dass das Tensorprodukt mit Kolimiten verträglich ist. Insbesondere erhalten wir so einen konzeptionellen Beweis dafür, dass Tensorprodukte mit direkten Summen und Quotienten verträglich sind.

Satz 1.5.10 (die Hom-Tensor-Adjunktion)**.** *Sei R ein ninoko Ring. Dann sind*

$$M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab} \quad \textit{und} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \cdot)\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$$

zueinander adjungierte Funktoren: Für R-Linksmoduln X und abelsche Gruppen Y sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R X, Y) &\longrightarrow {}_R\mathrm{Hom}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Y)\big) \\ f &\longmapsto \big(x \mapsto (m \mapsto f(m \otimes x))\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Hom}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Y)\big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R X, Y) \\ f &\longmapsto \big(m \otimes x \mapsto f(x)(m)\big) \end{aligned}$$

zueinander inverse wohldefinierte natürliche Bijektionen (Isomorphismen abelscher Gruppen).

Beweis. Es ist zu zeigen, dass die obigen Abbildungen wohldefiniert sind, zueinander invers sind, und mit Morphismen auf den eingesetzten Objekten verträglich sind. Wir zeigen stellvertretend nur, dass die erste Abbildung φ wohldefiniert ist (die anderen Aussagen folgen mit ähnlichen elementaren Rechnungen; nachrechnen):

Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R X, Y)$. Dann ist $g := f \circ \otimes\colon M \times X \longrightarrow Y$ ein R-balanciertes Produkt. Insbesondere ist für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow Y \\ m &\longmapsto f(m \otimes x) \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$-linear und auch $\varphi(f)\colon X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Y)$ ist $\mathbb{Z}$-linear. Warum ist $\varphi(f)$ auch R-linear? Sei dazu $r \in R$ und $x \in X$. Dann ist (nach Definition der R-Linksmodulstruktur auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Y)$ aus der R-Rechtsmodulstruktur auf M)

$$\begin{aligned}\varphi(f)(r \cdot x) &= \big(m \mapsto f(m \otimes r \cdot x)\big) = \big(m \mapsto f(m \cdot r \otimes x)\big) \\ &= r \cdot \big(m \mapsto f(m \otimes x)\big) \\ &= r \cdot \big(\varphi(f)(x)\big).\end{aligned}$$ □

Bemerkung 1.5.11 (Eindeutigkeit des Tensorprodukts)**.** Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. Dann sind die Funktoren $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \,\cdot\,)$ und ${}_R\mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \,\cdot\,))\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ natürlich isomorph (nach Satz 1.5.10); man beachte dabei, dass der Beweis dieser Konsequenz von Satz 1.5.10 allein mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $M \otimes_R N$ geführt werden kann. Nach dem Mini-Yoneda-Lemma (Proposition 1.3.6) ist somit $M \otimes_R N$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bemerkung 1.5.12. Die Adjunktion aus Satz 1.5.10 verallgemeinert sich wie folgt: Seien R, S ninoko Ringe und sei M ein (S, R)-Bimodul. Dann sind

$$M \otimes_R \,\cdot\, : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod} \quad \text{und} \quad {}_S\mathrm{Hom}(M, \,\cdot\,)\colon {}_S\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$$

zueinander adjungierte Funktoren. Man muss dazu nur feststellen, dass die Isomorphismen aus Satz 1.5.10 mit den S-Linksmodulstrukturen verträglich sind. Auch die folgenden Korollare 1.5.13 und 1.5.14 besitzen eine entsprechende Verallgemeinerung.

Korollar 1.5.13 (Verträglichkeit des Tensorprodukts mit Kolimiten)**.** *Sei R ein ninoko Ring und M ein R-Rechtsmodul. Ist $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und ist $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ ein I-Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$, so induzieren die Abbildungen $(\mathrm{id}_M \otimes_R f_i)_{i\in I}$ einen Isomorphismus*

$$\varinjlim_{i\in I}(M \otimes_R X_i) \cong_{\mathbb{Z}} M \otimes_R \varinjlim_{i\in I} X_i$$

abelscher Gruppen; der Kolimes auf der linken Seite wird dabei über das I-Diagramm $\big((M \otimes_R X_i)_{i\in I}, (\mathrm{id}_M \otimes_R f_{i,j})_{i,j\in I, i\leq j}\big)$ in Ab gebildet. Insbesondere gilt:

1. *Ist I eine Menge und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Linksmoduln, so ist die folgende Abbildung ein wohldefinierter Isomorphismus abelscher Gruppen:*

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R X_i) &\longrightarrow M \otimes_R \bigoplus_{i\in I} X_i \\ (m_i \otimes x_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} m_i \otimes x_i.\end{aligned}$$

2. *Ist X ein R-Linksmodul und ist $A \subset X$ ein R-Unterlinksmodul, so ist die folgende Abbildung ein wohldefinierter Isomorphismus abelscher Gruppen:*

$$\begin{aligned}(M \otimes_R X) \,/\, \operatorname{im}\bigl(\mathrm{id}_M \otimes_R (A \hookrightarrow X)\bigr) &\longrightarrow M \otimes_R (X/A)\\ [m \otimes x] &\longmapsto m \otimes [x].\end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 1.5.10 ist $M \otimes_R \cdot$ ein linksadjungierter Funktor (nämlich zu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \cdot\,)$) und somit mit Kolimiten verträglich (Proposition 1.4.14).

Da direkte Summen und Quotientenmoduln spezielle Kolimiten sind (Beispiel 1.4.7, Beispiel 1.4.8), folgen auch die Zusatzaussagen. □

Korollar 1.5.14 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei M ein R-Linksmodul. Dann ist der Funktor $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$* rechtsexakt*: Ist*

$$A \xrightarrow{\ i\ } X \xrightarrow{\ \pi\ } Q \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ (d.h. $\operatorname{im} i = \ker \pi$ und $\operatorname{im} \pi = Q$), so ist die induzierte Sequenz

$$M \otimes_R A \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes_R i} M \otimes_R X \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes_R \pi} M \otimes_R Q \longrightarrow M \otimes_R \{0\} \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$$

in Ab *exakt.*

Beweis. Nach dem Homomorphiesatz (Satz II.2.3.21) induziert π einen Modulisomorphismus $X/\operatorname{im} i \cong_R Q$. Dies ist einfach eine Umformulierung der Verträglichkeit von $M \otimes_R \cdot$ mit Quotienten (Korollar 1.5.13). □

Caveat 1.5.15 (Exaktheit?!)**.** Das Tensorprodukt überführt injektive Homomorphismen im allgemeinen *nicht* in injektive Homomorphismen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}f \colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ x &\longmapsto 2 \cdot x\end{aligned}$$

ein injektiver Homomorphismus (in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$), aber

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2} \otimes_{\mathbb{Z}} f \colon \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\\ [m] \otimes [x] &\longmapsto [m] \otimes [2 \cdot x] = [2 \cdot m] \otimes [x] = 0 \otimes [x] = 0.\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \ncong_{\mathbb{Z}} \{0\}$ ist somit $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2} \otimes_{\mathbb{Z}} f$ *nicht* injektiv.

In Kapitel 3 und Kapitel 5 werden wir uns genauer mit diesem Defekt des Tensorprodukts auseinandersetzen.

Anmerkung zum Lernen. Wählen Sie ein Buch über Kommutative Algebra aus und vergleichen Sie den Beweis der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts in diesem Buch mit unserem Beweis.

1.5.4 Beispiele

Als Verallgemeinerung von Beispiel 1.5.6 erhalten wir:

Proposition 1.5.16 (Tensorprodukt und ggT)**.** *Sei R ein Ring, seien $a, b \subset R$ Ideale in R. Dann ist*

$$\begin{aligned} R/a \otimes_R R/b &\longrightarrow R/(a \cup b) \\ [x] \otimes [y] &\longmapsto [x \cdot y] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von R-Moduln; dabei bezeichnet $(a \cup b)$ das von $a \cup b$ erzeugte Ideal in R.

Insbesondere gilt: Ist R ein Hauptidealring und sind $a, b \in R$, so ist

$$R/(a) \otimes_R R/(b) \cong_R R/(a, b) = R/(\mathrm{ggT}(a, b)).$$

Beweis. Die erste Aussage folgt mit der konkreten Angabe eines Inversen oder ganz bequem aus der Verträglichkeit von $R/a \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ mit Quotienten (Übungsaufgabe).

Die zweite Aussage folgt aus der ersten, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in Hauptidealringen die Gleichung $(a, b) = (\mathrm{ggT}(a, b))$ gilt (Proposition II.2.4.27). □

Beispiel 1.5.17 (Tensorprodukte von endlich erzeugten abelschen Gruppen)**.** Sind A und B endlich erzeugte abelsche Gruppen, so können wir $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ explizit berechnen, sobald wir Standardzerlegungen von A und B (im Sinne von Korollar II.2.5.16) kennen (Bemerkung 1.5.9, Korollar 1.5.13, Proposition 1.5.16).

Analog kann man auch für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen verfahren (mithilfe des Hauptsatzes über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen; Satz II.2.5.15).

Beispiel 1.5.18 (Tensorprodukte und Torsion)**.** Tensorprodukte können wie folgt eingesetzt werden, um Torsion zu vergessen: Sei A eine abelsche Gruppe, die nur aus Torsionselementen (d.h. nur aus Elementen endlicher Ordnung) besteht. Dann gilt

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong_{\mathbb{Z}} \{0\},$$

denn: Sei $x \in \mathbb{Q}$, $a \in A$ und sei n die additive Ordnung von $a \in A$. Da A eine Torsionsgruppe ist, ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Also gilt

$$x \otimes a = \left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot x\right) \otimes a = \left(\frac{1}{n} \cdot x\right) \otimes (n \cdot a) = \left(\frac{1}{n} \cdot x\right) \otimes 0 = 0.$$

Da $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ von Elementartensoren erzeugt wird, folgt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

Beispiel 1.5.19 (Rang endlich erzeugter abelscher Gruppen)**.** Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Nach dem Klassifikationssatz über endlich erzeug-

te abelsche Gruppen (Korollar II.2.5.16) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine endliche abelsche Gruppe B mit

$$A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \oplus B.$$

Wenden wir darauf nun den Funktor $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : \mathsf{Ab} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod} = \mathsf{Vect}_{\mathbb{Q}}$ an, so erhalten wir (da Funktoren mit Isomorphie verträglich sind), dass

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A &= \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}^n \oplus B) && \text{(Proposition 1.2.6)} \\
&= \dim_{\mathbb{Q}} \big((\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})^n \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \big) && \text{(Korollar 1.5.13)} \\
&= \dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})^n + \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B && \text{(Additivität von } \dim_{\mathbb{Q}}\text{)} \\
&= \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^n + \dim_{\mathbb{Q}} \{0\} && \text{(Bemerkung 1.5.9, Beispiel 1.5.18)} \\
&= n + 0 = n.
\end{aligned}$$

Auf diese Weise liefert also auch das Tensorprodukt einen Beweis der Eindeutigkeit des Rangs des freien Anteils einer endlich erzeugten abelschen Gruppe.

Anmerkung zum Lernen. Vergegenwärtigen Sie sich nochmal genau, an welchen Stellen in den vorigen Beispielen allgemeine kategorientheoretische Methoden geholfen haben, konkrete Rechnungen zu vereinfachen!

Caveat 1.5.20 (Tensorprodukte und inverse Limiten)**.** Tensorprodukte sind im allgemeinen nicht mit inversen Limiten (zum Beispiel Produkten!) verträglich, denn:

- Einerseits gilt nach Beispiel 1.5.18, dass

  $$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Also ist auch $\prod_{n \in \mathbb{N}_{>0}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

- Aber $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/n$ ist *nicht* trivial, denn: Der diagonale Homomorphismus

  $$\begin{aligned} \Delta \colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/n =: Z \\ z &\longmapsto (z)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

  ist injektiv (denn $z \not\equiv 1 \mod (|z| + 1)$ für alle $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Wir werden sehen, dass dann auch $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta \colon \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Z$ injektiv ist (Beispiel 3.2.18; dies liegt an dem speziellen Verhältnis von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Z}$). Wegen $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \ncong_{\mathbb{Z}} \{0\}$ ist somit auch $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Z \ncong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

Ausblick 1.5.21 (Tensorprodukte von Ringen/Körpern)**.** Sind R und S Ringe, so bildet die abelsche Gruppe $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ zusammen mit der (wohldefinierten!) Multiplikation

$$\begin{aligned}(R \otimes_{\mathbb{Z}} S) \times (R \otimes_{\mathbb{Z}} S) &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S \\ (x \otimes y, x' \otimes y') &\longmapsto (x \cdot x') \otimes (y \cdot y')\end{aligned}$$

einen Ring. Ringe dieser Art haben zum Beispiel die folgenden Anwendungen:

- *strukturell:* Der Ring $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ bildet zusammen mit den kanonischen Homomorphismus $R \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ und $S \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ das Koprodukt von R und S in der Kategorie Ring (Übungsaufgabe).
- *in der Galoistheorie:* Sind $L \mid K$ und $M \mid K$ Körpererweiterungen desselben Grundkörpers K, so enthält der Ring $M \otimes_K L$ (dies ist im allgemeinen *kein* Körper, sondern nur ein direktes Produkt von Körpern) Information über die Komposita von Einbettungen von L und M in einen gemeinsamen umgebenden Körper (Übungsaufgabe).

In der Kommutativen Algebra wird der Hauptzweck des Tensorprodukts sein, Basiswechsel zu Ringen mit einfacherer Modulstruktur durchzuführen.

2

Das Primspektrum

Primideale treten in der Algebra an mehreren Stellen auf natürliche Weise auf:

- In der Zahlentheorie als verallgemeinerte Primzahlen,
- in der algebraischen Geometrie als verallgemeinerte „Punkte“.

Die Gesamtheit aller Primideale eines Rings bildet das Primspektrum.

Wir werden in diesem Kapitel die Grundbegriffe zu Primidealen und maximalen Idealen wiederholen und die geometrische Bedeutung von maximalen Idealen und Primidealen skizzieren. Außerdem werden wir kurz den Dimensionsbegriff für Ringe einführen.

Überblick über dieses Kapitel.

2.1	Das Primspektrum	50
2.2	Affine algebraische Geometrie	58
2.3	Dimension	74

Schlüsselbeispiel. Primspektrum von $\mathbb{Z}$ und von Funktionen- bzw. Koordinatenringen

2.1 Das Primspektrum

Die Gesamtheit aller Primideale eines Rings bildet das Primspektrum dieses Rings. Wir wiederholen die Grundbegriffe zu Primidealen und maximalen Idealen und skizzieren dann die geometrische Bedeutung von maximalen Idealen und Primidealen.

2.1.1 Wiederholung: Primideale und maximale Ideale

In der Teilbarkeitstheorie sind Primelemente die atomaren Bausteine. Die zentrale Idee des Primbegriffs ist dabei nicht Irreduzibilität, sondern die Teilbarkeit von Faktoren in Produkten bzw. die Eindeutigkeit von Faktorisierungen.

Wir erinnern zunächst an grundlegende Typen von Ringen:

- Ein *Integritätsring* ist ein nullteilerfreier Ring mit $0 \neq 1$.

  Zum Beispiel sind $\mathbb{Z}$, Körper und Polynomringe über Integritätsringen Integritätsringe. Aber $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation) ist *kein* Integritätsring.

- Ein *Hauptidealring* ist ein Integritätsring, in dem jedes Element von einem Element erzeugt wird.

  Zum Beispiel sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}[T]$ Hauptidealringe, *nicht* aber $\mathbb{Z}[T]$ oder $\mathbb{Q}[X, Y]$.

- Ein *faktorieller Ring* ist ein Hauptidealring, in dem jedes Element ungleich 0 eine Zerlegung in Einheiten und Primelemente besitzt.

  Zum Beispiel sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}[T]$ faktorielle Ringe; allgemeiner sind Hauptidealringe faktoriell (Satz III.2.2.37) und Polynomringe über faktoriellen Ringen sind faktoriell (Satz von Gauß; Satz III.2.2.40). Aber $\mathbb{Z}[i \cdot \sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ ist *kein* faktorieller Ring.

Definition 2.1.1 (Primideal)**.** Sei R ein Ring. Ein Ideal $p \subset R$ in R ist *prim*, wenn $p \neq R$ und

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y \in p \Longrightarrow x \in p \vee y \in p.$$

Beispiel 2.1.2 (Primideale)**.**

- Das Ideal $(2018) \subset \mathbb{Z}$ ist *nicht* prim (nachrechnen).

- Sei R ein Integritätsring und sei $p \in R \setminus \{0\}$ keine Einheit. Dann ist das Hauptideal (p) genau dann prim, wenn p prim ist (Beispiel III.2.2.14).

  Ist R ein faktorieller Ring, so ist $p \in R$ genau dann prim, wenn p irreduzibel ist. In solchen Fällen lässt sich daher oft überprüfen, ob ein gegebenes Element prim ist oder nicht, indem man es auf Irreduzibilität testet.

Definition 2.1.3 (maximales Ideal)**.** Sei R ein Ring. Ein Ideal $m \subset R$ in R ist *maximal*, wenn $m \neq R$ und für alle Ideale $a \subset R$ in R gilt: Ist $m \subset a$, so folgt bereits $a = m$ oder $a = R$.

Beispiel 2.1.4 (maximale Ideale)**.**

- Ist $p \in \mathbb{Z}$ prim, so ist $(p) \subset \mathbb{Z}$ ein maximales Ideal.

  Allgemeiner gilt (Beispiel III.2.2.14): Ist R ein Hauptidealring und ist $p \in R$ prim, so ist (p) ein maximales Ideal in R.

- Das Ideal $(X) \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ ist prim (nachrechnen), aber *nicht* maximal (denn $(X) \subset (X, Y) \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ ist eine echt aufsteigende Idealkette).

- Das Ideal $(X \cdot Y) \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ ist weder prim noch maximal (nachrechnen).

In der Praxis ist es oft besser, die Primeigenschaft oder Maximalität eines Ideals nicht anhand der Definition von Hand nachzuweisen, sondern die folgende Charakterisierung mithilfe des Restklassenrings zu verwenden:

Bemerkung 2.1.5 (Restklassenring)**.** Sei R ein Ring und $a \subset R$ ein Ideal. Dann ist $R/a = \{x + a \mid x \in R\}$ eine abelsche Gruppe (bezüglich der von der Addition auf R induzierten Addition auf R/a). Außerdem gilt:

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot : R/a \times R/a &\longrightarrow R/a \\ (x + a, y + a) &\longmapsto (x \cdot y) + a \end{aligned}$$

   ist wohldefiniert.

2. Die Menge R/a bildet bezüglich der obigen Addition bzw. Multiplikation einen Ring, den *Restklassenring von R modulo a*.

Satz 2.1.6 (Restklassenringe zu Primidealen; Satz III.2.2.15)**.** *Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal. Dann gilt:*

1. *Der Restklassenring R/a ist genau dann ein Integritätsring, wenn a ein Primideal ist.*

2. *Der Restklassenring R/a ist genau dann ein Körper, wenn a ein maximales Ideal ist.*

Insbesondere ist jedes maximale Ideal prim.

Beispiel 2.1.7 (der Körper $\mathbb{F}_p$)**.** Ist $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, so ist das Ideal $(p) \subset \mathbb{Z}$ maximal, und damit $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/(p)$ ein Körper (bezüglich repräsentantenweiser Addition und Multiplikation).

Anmerkung zum Lernen. Falls Sie bereits Algebra gehört haben: Wie kann man den Mechanismus aus dem vorigen Beispiel nutzen, um gezielt Körper mit gewissen Zusatzeigenschaften zu konstruieren? (Zum Beispiel Körper mit vorgegebener Elementzahl oder mit Elementen, die vorgegebene polynomiale Gleichungen lösen.)

Jeder nicht-triviale Ring enthält maximale Ideale; genauer gilt sogar:

Satz 2.1.8 (Existenz maximaler Ideale; Satz III.2.2.18)**.** *Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a \neq R$. Dann gibt es ein maximales Ideal $m \subset R$ mit $a \subset m$.*

2.1.2 Punkte vs. Ideale

Welche geometrische Bedeutung haben Primideale? Um dies besser zu verstehen, betrachten wir zunächst kein rein algebraisches, sondern ein topologisches Problem:

Frage 2.1.9. Ist X ein nicht-leerer, kompakter topologischer Hausdorffraum (zum Beispiel $X = [0, 1]$), so bildet die Menge

$$R := C(X, \mathbb{R})$$

der stetigen Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$ einen Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation. Wie hängen in dieser Situation ringtheoretische Eigenschaften von R mit topologischen Eigenschaften von X zusammen? Zum Beispiel: Kann man die Punkte von X aus dem Ring R rekonstruieren?

Wir zeigen nun, dass man tatsächlich einiges über X am Funktionenring $C(X, \mathbb{R})$ ablesen kann:

Proposition 2.1.10 (Punkte vs. Ideale)**.** *Sei X ein nicht-leerer, kompakter topologischer Hausdorffraum (zum Beispiel $X = [0, 1]$) und $R := C(X, \mathbb{R})$. Dann gilt:*

1. *Ist $x \in X$, so ist $m_x := \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal in R.*
2. *Ist umgekehrt $m \subset R$ ein maximales Ideal, so gibt es genau ein $x \in X$ mit $m = m_x$.*

Beweis. Zu 1. Als Kern der Auswertungsabbildung $E_x \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ bei x ist m_x ein Ideal.

Warum ist m_x maximal? Nach Satz 2.1.6 genügt es dafür zu zeigen, dass der Restklassenring R/m_x ein Körper ist. Die konstanten Funktionen vom Typ $X \longrightarrow \mathbb{R}$ zeigen, dass $\operatorname{im} E_x = \mathbb{R}$ ist. Also ist (nach dem Homomorphiesatz für Ringhomomorphismen)

$$R/m_x \cong_{\mathsf{Ring}} \operatorname{im} E_x = \mathbb{R}$$

ein Körper, und damit m_x ein maximales Ideal in R.

Etwas expliziter kann man die Maximalität von m_x auch direkt anhand der definierenden Eigenschaft verifizieren: Es gilt $m_x \neq R$, denn die konstante Funktion 1 liegt in R, aber nicht in m_x (nach Definition von m_x).

Sei $a \subset R$ ein Ideal mit $m_x \subset a$ aber $a \neq m_x$. Also gibt es ein $g \in a \setminus m_x$. Insbesondere ist $g(x) \neq 0$; indem wir mit der konstanten Funktion $1/g(x)$ multiplizieren, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $g(x) = 1$ ist. Für alle $f \in R$ gilt also

$$f = \big(f - f(x) \cdot g\big) + f(x) \cdot g.$$

Der erste Summand liegt in $m_x \subset a$ (nach Definition von m_x); der zweite Summand liegt in a (wegen $g \in a$ und der Idealeigenschaft). Also ist $f \in a$, und damit $a = R$. Somit ist das Ideal m_x maximal.

Zu 2. Sei umgekehrt $m \subset R$ ein maximales Ideal. *Angenommen*, es gäbe *kein* $x \in X$ mit $m = m_x$. Da wir bereits wissen, dass die Ideale m_x mit $x \in X$ maximal sind, folgt somit: Für jedes $x \in X$ ist $m \setminus m_x \neq \emptyset$ bzw.

$$\forall_{x \in X} \quad \exists_{g_x \in m} \quad g_x(x) \neq 0.$$

Jede dieser Funktionen g_x ist aufgrund der Stetigkeit bereits in einer offenen Umgebung um x von Null verschieden. Da X kompakt ist, genügen endlich viele solcher Umgebungen, um X zu überdecken. Also gibt es eine endliche Teilmenge $Y \subset X$ mit

$$g := \sum_{y \in Y} {g_y}^2 > 0;$$

mit der Idealeigenschaft folgt $g \in m$. Dann ist auch das punktweise Inverse $1/g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf X und (wegen $g \in m$)

$$1 = \frac{1}{g} \cdot g \in m.$$

Dies liefert aber $m = R$, im Widerspruch zur Maximalität von m. Also gibt es ein $x \in X$ mit $m = m_x$.

Warum ist $x \in X$ eindeutig durch m bestimmt? Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gilt $m_x \neq m_y$, denn: Da X ein kompakter Hausdorffraum ist, zeigt der Satz von Urysohn [7, Kapitel 8]: Es gibt eine stetige Funktion $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Also ist $f \in m_x$, aber $f \notin m_y$; insbesondere ist $m_x \neq m_y$. □

Ausblick 2.1.11 (Topologie vs. Ideale)**.** In der Situation von Proposition 2.1.10 ist es sogar möglich, die Topologie auf X aus der Idealstruktur von $C(X, \mathbb{R})$ zu rekonstruieren (Übungsaufgabe).

Man führt daher die folgende Abstraktion durch: Man fasst die Menge aller maximalen Ideale eines Rings als geometrisches Objekt auf. Die Menge aller maximalen Ideale von Ringen ist jedoch *nicht* unter allgemeinen Ringhomomorphismen funktoriell (Caveat 2.1.16). Dies ist einer der Gründe, warum man stattdessen die Menge der betrachteten Ideale von den maximalen Idealen auf die Primideale erweitert.

2.1.3 Das Primspektrum

Definition 2.1.12 (Primspektrum, Maximalspektrum)**.** Sei R ein Ring.

- Das *Primspektrum von R* (oder kurz *Spektrum von R*) ist

$$\operatorname{Spec} R := \{p \mid p \subset R \text{ ist ein Primideal}\}.$$

- Das *Maximalspektrum von R* ist

$$\operatorname{mSpec} R := \{m \mid m \subset R \text{ ist ein maximales Ideal}\}.$$

Da jedes maximale Ideal prim ist, ist das Maximalspektrum eines Ringes im Primspektrum enthalten.

Beispiel 2.1.13 (Spektrum von Ringen)**.** Wir beginnen mit ein paar einfachen Beispielen (Abbildung 2.1): Wir werden im folgenden auch kurz 0 für das Nullideal von Ringen schreiben.

- Ist K ein Körper, so ist $\operatorname{mSpec} K = \operatorname{Spec} K = \{(0)\}$.
- Es ist

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(p) \mid p \in \mathbb{N} \text{ prim}\} \cup \{0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{mSpec} \mathbb{Z} = (\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) \setminus \{0\}.$$

- Ist K ein Körper, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} K[T] &= \{(p) \mid p \in K[T] \text{ prim}\} \cup \{0\} \quad \text{und} \\ \operatorname{mSpec} K[T] &= (\operatorname{Spec} K[T]) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

  Ist K algebraisch abgeschlossen (z.B. $K = \mathbb{C}$), so ist

$$\operatorname{Spec} K[T] = \{(T - x) \mid x \in K\} \cup \{0\}.$$

- Das Spektrum von $\mathbb{Z}[T]$ ist bereits etwas komplizierter. Es enthält zum Beispiel Ideale der Form (p) (mit $p \in \mathbb{Z}$ prim) oder (f) (wobei $f \in \mathbb{Z}[T]$

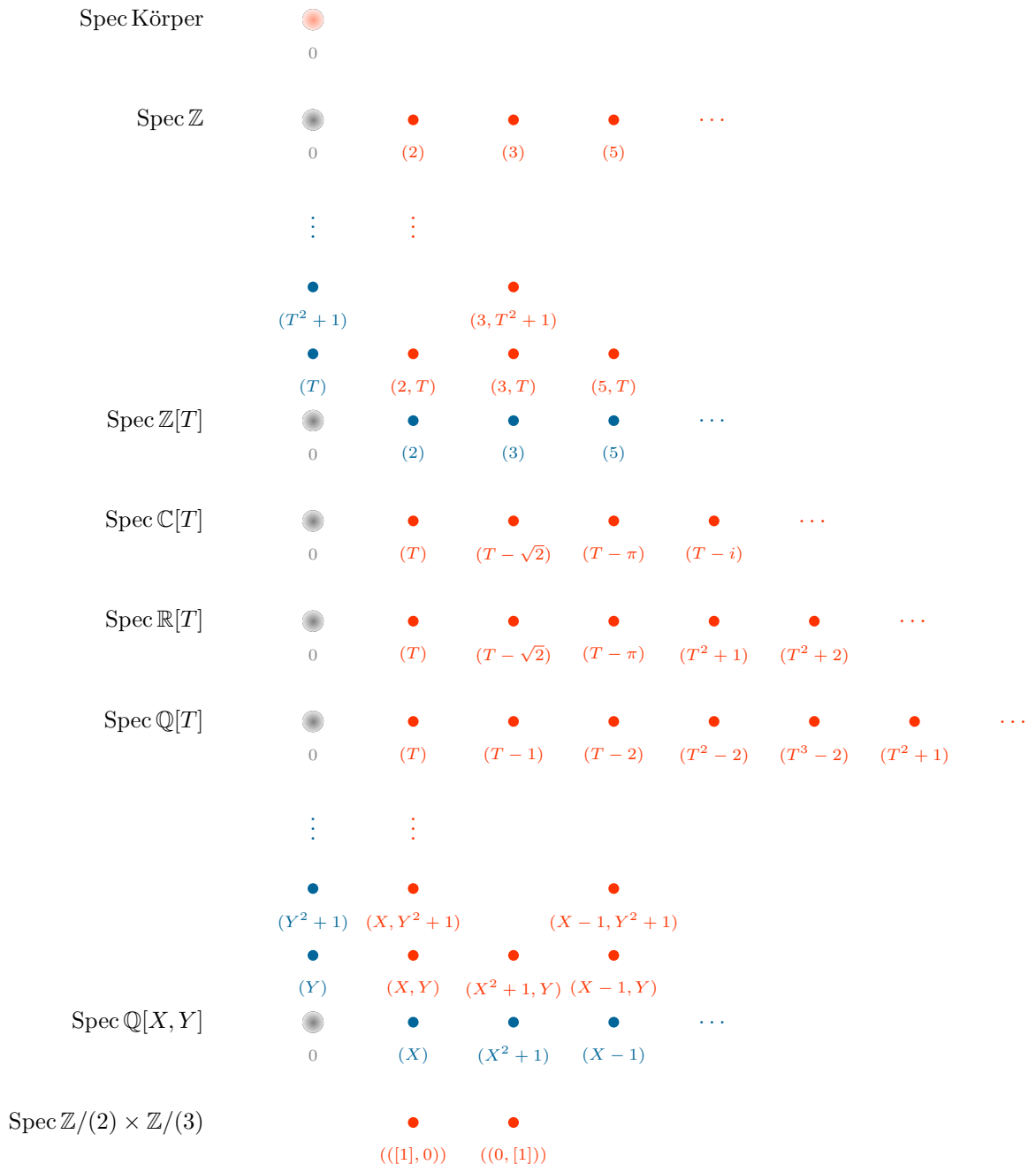


Abbildung 2.1.: Vage Skizzen des Spektrums einiger Ringe; maximale Ideale sind rot; dichte Punkte (im Sinne der Zariski-Topologie; Proposition 2.2.5) schattiert.

primitiv (z.B. normiert) und in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist) oder auch (p, g) (wobei $p \in \mathbb{Z}$ prim ist und das Bild von $g \in \mathbb{Z}[T]$ in $\mathbb{F}_p[T]$ irreduzibel ist). Die Ideale der obigen Form (p) bzw. (f) sind *nicht* maximal, aber (p, g) ist maximal.

Das Spektrum von $\mathbb{Z}[T]$ hat somit etwas „Zweidimensionales“ an sich.

- Ähnlich ist auch das Spektrum von $\mathbb{Q}[X, Y]$ eher „zweidimensional“.
- Es gilt (nachrechnen)

  $$\mathrm{mSpec}\big(\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3)\big) = \mathrm{Spec}\big(\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3)\big) = \big\{\big(([1], 0)\big), \big((0, [1])\big)\big\}.$$

  Analog kann man zeigen, dass $(\mathbb{Z}/(2))^{2018}$ ein Ring ist, der genau 2018 Primideale enthält. Es bleibt aber die Frage, wie man einen *nullteilerfreien* Ring mit dieser Eigesnchaft konstruieren kann.
- Ist X ein nicht-leerer, kompakter topologischer Raum, so gibt es eine kanonische Bijektion zwischen X und $\mathrm{mSpec}\, C(X; \mathbb{R})$ (Proposition 2.1.10).

Bemerkung 2.1.14 (Funktorialität des Spektrums)**.** Seien R und S Ringe und sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Ist $p \subset S$ ein Primideal, so ist das Ideal

$$f^{-1}(p) = \big\{x \in R \;\big|\; f(x) \in p\big\} \subset R$$

ein Primideal in R, denn: Man kann dies direkt mit der Definition nachrechnen; alternativ kann man auch über den Restklassenring argumentieren (Satz 2.1.6): Da $p \subset S$ ein Primideal ist, ist S/p ein Integritätsring. Nach Konstruktion ist der von f induzierte Ringhomomorphismus

$$R/f^{-1}(p) \longrightarrow S/p$$

injektiv. Also ist auch $R/f^{-1}(p)$ ein Integritätsring, und damit $f^{-1}(p)$ ein Primideal in R. Insgesamt erhalten wir somit eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\, f\colon \mathrm{Spec}\, S &\longrightarrow \mathrm{Spec}\, R \\ p &\longmapsto f^{-1}(p). \end{aligned}$$

Da Urbildnehmen mit Abbildungskomposition verträglich ist, erhalten wir somit den kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Spec}\colon \mathsf{Ring} \longrightarrow \mathsf{Set}\,.$$

Beispiel 2.1.15. Sei $i\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[T]$ die Inklusion. Dann ist (nach Definition)

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\, i\colon \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[T] &\longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z} \\ p &\longmapsto i^{-1}(p) = p \cap \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Caveat 2.1.16 (Un-Funktorialität des Maximalspektrums)**.** Man beachte jedoch, dass Urbilder maximaler Ideale unter Ringhomomorphismen im allgemeinen *keine* maximalen Ideale sind: Zum Beispiel ist $\{0\} \subset \mathbb{Q}$ ein maximales Ideal, aber das Urbild unter der Inklusion $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ist das Nullideal in $\mathbb{Z}$, welches in $\mathbb{Z}$ *nicht* maximal ist.

Proposition 2.1.17 (Spektrum von Restklassenringen)**.** *Sei R ein Ring, sei $a \subset R$ ein Ideal und sei $\pi\colon R \longrightarrow R/a$ die kanonische Projektion. Dann liefert* $\operatorname{Spec}\pi\colon \operatorname{Spec} R/a \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ *Bijektionen*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} R/a &\longrightarrow V_R(a) := \{p \in \operatorname{Spec} R \mid a \subset p\} \\ q &\longmapsto \pi^{-1}(q), \\ \operatorname{mSpec} R/a &\longrightarrow V_R(a) \cap \operatorname{mSpec} R \\ m &\longmapsto \pi^{-1}(m). \end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen dies Schritt für Schritt nach:

- Die Abbildung $\operatorname{Spec}\pi\colon \operatorname{Spec} R/a \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ ist injektiv, denn: Sind $q, q' \in \operatorname{Spec} R/a$ mit $\operatorname{Spec}\pi(q) = \operatorname{Spec}\pi(q')$, so ist (da π surjektiv ist)

$$q = \pi\big(\pi^{-1}(q)\big) = \pi\big(\operatorname{Spec}\pi(q)\big) = \pi\big(\operatorname{Spec}\pi(q')\big) = \pi\big(\pi^{-1}(q')\big) = q'.$$

- Es gilt $\operatorname{Spec}\pi(\operatorname{Spec} R/a) \subset V_R(a)$, denn: Ist $q \in \operatorname{Spec} R/a$, so ist $a \subset \pi^{-1}(0) \subset \pi^{-1}(q)$.

- Die Abbildung $\operatorname{Spec}\pi\colon \operatorname{Spec} R/a \longrightarrow V_R(a)$ ist surjektiv, denn: Ist $p \in V_R(a)$, so ist $\pi(p) \subset R/a$ ein Ideal (da π surjektiv ist) und (wegen $\ker\pi = a$; nachrechnen)

$$\pi^{-1}\big(\pi(p)\big) = p.$$

  Außerdem ist $\pi(p) \subset R/a$ ein Primideal, denn (wegen $a \subset p$)

$$(R/a)/\pi(p) \cong_{\mathsf{Ring}} R/p$$

  ist ein Integritätsring (Satz 2.1.6).

Damit ist gezeigt, dass die erste Abbildung eine Bijektion ist.

Die Aussage über das Maximalspektrum folgt aus der Aussage über das Primspektrum, da die Abbildung $\operatorname{Spec}\pi$ mit Inklusionen verträglich ist. □

Literaturaufgabe (Spektrum)**.** Der Begriff „Spektrum“ ist in der Mathematik hoffnungslos überbucht. Versuchen Sie möglichst viele mathematische Konzepte zu finden, die den Namen „Spektrum“ tragen.

2.2 Affine algebraische Geometrie

Wir erweitern nun unsere geometrische Anschauung um rein algebraische Beispiele: Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so wissen wir bereits, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \operatorname{mSpec} K[T] = \big(\operatorname{Spec} K[T]\big) \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto (T - x) \end{aligned}$$

bijektiv ist. Als ersten Schritt diskutieren wir den zugehörigen „höherdimensionalen“ Fall $\operatorname{mSpec} K[X_1, \ldots, X_n]$. Im Anschluss verallgemeinern wir unsere Betrachtungen auf Nullstellenmengen von polynomialen Gleichungen in K^n und beginnen mit dem Wörterbuch der affinen algebraischen Geometrie (Anhang A.1).

2.2.1 Der affine Raum

In Analogie zum eindimensionalen, algebraisch abgeschlossenen, Fall, definiert man:

Definition 2.2.1 (affiner Raum)**.** Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so bezeichnet man $\mathbb{A}^n_K := \operatorname{Spec} K[X_1, \ldots, X_n]$ als *n-dimensionalen affinen Raum über K*.

Caveat 2.2.2 (affiner Raum)**.** Es gibt viele Zugänge zur algebraischen Geometrie, die verschiedene Konzepte verwenden, um geometrische Objekte zu beschreiben. Je nachdem, welchen Zugang man verwendet, wird auch der Begriff des affinen Raums leicht unterschiedlich definiert. Genauer gesagt kann man algebraische Geometrie in verschiedenen Kategorien und mit unterschiedlich viel Zusatzstruktur betreiben. Wir werden im folgenden eine Mischung aus dem naiven geometrischen Zugang und der Sprache der Primspektren verwenden.

Wie im topologischen Fall (Proposition 2.1.10) ergibt sich für algebraisch abgeschlossene Körper K eine Korrespondenz zwischen Punkten in K^n und maximalen Idealen von $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Satz 2.2.3 (affine Räume über algebraisch abgeschlossenen Körpern)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist*

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow \operatorname{mSpec} K[X_1, \ldots, X_n] \\ x &\longmapsto (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Wir schreiben φ für die obige Abbildung.

- Ist $x \in K^n$, so ist $\varphi(x) = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ ein maximales Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$, denn der Restklassenring $K[X_1, \ldots, X_n]/\varphi(x) \cong K$ ist ein Körper (Satz 2.1.6).

- Die Abbildung φ ist injektiv, denn: Seien $x, y \in K^n$ mit $x \neq y$, d.h. es gibt ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_k \neq y_k$. Es gilt $(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) = \ker E_x$, wobei

$$\begin{aligned} E_x \colon K[X_1, \ldots, X_n] &\longrightarrow K \\ K \ni z &\longmapsto z \\ \text{für jedes } j \in \{1, \ldots, n\} \colon X_j &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

  der Einsetzungshomomorphismus zu x ist (offenbar sind die Polynome $X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n$ in $\ker E_x$ und beide Ideale sind maximal). Insbesondere ist

$$E_x(X_k - y_k) = x_k - y_k \neq 0,$$

  und damit $X_k - y_k \notin \ker E_x = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) = \varphi(x)$ aber nach Definition ist $X_k - y_k \in \varphi(y)$. Insbesondere ist $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Also ist φ injektiv.

- Die Abbildung φ ist surjektiv, denn: Sei $m \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein maximales Ideal. Dann ist $m \neq K[X_1, \ldots, X_n]$. Nach dem schwachen Hilbertschen Nullstellensatz (Satz 2.2.4) gibt es ein $x \in K^n$ mit

$$\forall_{f \in m} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

  Insbesondere ist $m \subset \ker E_x = \varphi(x)$. Da $\varphi(x)$ (nach dem ersten Schritt) und m (nach Voraussetzung) maximale Ideale sind, folgt $m = \varphi(x)$. Also ist φ surjektiv. □

Satz 2.2.4 (schwacher Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal mit $a \neq K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\{x \in K^n \mid \forall_{f \in a} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \neq \emptyset$.*

Wir werden den Hilbertschen Nullstellensatz später beweisen, wenn wir mehr technische Hilfsmittel zur Verfügung haben (Kapitel 4.2).

Der affine Raum $\mathbb{A}^n_K$ enthält außer den Punkten zu den maximalen Idealen noch weitere Punkte; wir werden im folgenden sehen, wie man die Punkte zu maximalen Idealen topologisch von nicht-maximalen Primidealen unterscheiden kann.

Anmerkung zum Lernen. Vergleichen Sie die Beweise von Satz 2.2.3 und Proposition 2.1.10. Welche Parallelen gibt es? Welche Schritten waren in welchem Beweis einfacher?

2.2.2 Die Zariski-Topologie

Wir verfeinern nun das Primspektrum, indem wir eine Topologie auf dem Primspektrum einführen. Dadurch wird der Funktor Spec: Ring $\longrightarrow$ Set zu einem Funktor Spec: Ring $\longrightarrow$ Top.

Proposition 2.2.5 (Zariski-Topologie)**.** *Sei R ein Ring. Ist $a \subset R$ eine Teilmenge, so schreiben wir*

$$V_R(a) := \{p \in \operatorname{Spec} R \mid a \subset p\} \subset \operatorname{Spec} R.$$

1. *Dann ist $\big\{\operatorname{Spec} R \setminus V_R(a) \;\big|\; a \subset R\big\}$ eine Topologie auf* $\operatorname{Spec} R$*, die* Zariski-Topologie*.*
2. *Ist S ein Ring und $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so ist* $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ *stetig bezüglich der Zariski-Topologie. Insbesondere verfeinert sich der Funktor* Spec *auf diese Weise zu einem Funktor* Spec: Ring $\longrightarrow$ Top*.*

Beweis. Zu 1. Wir zeigen, dass $\{\operatorname{Spec} R \setminus V_R(a) \mid a \subset R\}$ die Axiome für eine Topologie erfüllt. Dazu zeigen wir, dass die Menge $C := \{V_R(a) \mid a \subset R\}$ die Axiome für die *abgeschlossenen* Mengen einer Topologie erfüllt (damit sparen wir uns das etwas unhandliche Bilden von Komplementen):

- Es ist $\emptyset \in C$ und $\operatorname{Spec} R \in C$, denn

$$\emptyset = V_R\big(\{1\}\big) \quad \text{und} \quad \operatorname{Spec} R = V_R\big(\{0\}\big).$$

- Die Menge C ist unter Durchschnitten abgeschlossen: Ist $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von R, so gilt (Übungsaufgabe)

$$\bigcap_{i\in I} V_R(a_i) = V_R\Big(\bigcup_{i\in I} a_i\Big).$$

- Die Menge C ist unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen: Sind $a, b \subset R$, so gilt (Übungsaufgabe)

$$V_R(a) \cup V_R(b) = V_R\big(\{x \cdot y \mid x \in a, y \in b\}\big).$$

Zu 2. Es genügt zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossene Mengen sind. Sei also $a \subset R$. Dann ist (nachrechnen)

$$\begin{aligned}(\operatorname{Spec} f)^{-1}\big(V_R(a)\big) &= (\operatorname{Spec} f)^{-1}\{p \in \operatorname{Spec} R \mid a \subset p\}\\ &= \big\{q \in \operatorname{Spec} S \;\big|\; a \subset f^{-1}(q)\big\}\\ &= \big\{q \in \operatorname{Spec} S \;\big|\; f(a) \subset q\big\}\\ &= V_S\big(f(a)\big).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.6 (abgeschlossene Punkte in der Zariski-Topologie)**.** *Sei R ein Ring und $x \in \operatorname{Spec} R$. Dann ist die Einpunktmenge $\{x\}$ genau dann abgeschlossen, wenn x ein maximales Ideal in R ist.*

Beweis. Ist x ein maximales Ideal in R, so ist $\{x\} = V_R(x)$ in der Zariski-Topologie abgeschlossen.

Sei umgekehrt $\{x\}$ in der Zariski-Topologie abgeschlossen. Also gibt es ein $a \subset R$ mit $\{x\} = V_R(a)$. Da x ein Primideal in R ist, ist $x \neq R$; also gibt es ein maximales Ideal $m \subset R$ mit $x \subset m$ (Satz 2.1.8). Insbesondere ist daher $m \in V_R(a) = \{x\}$, und damit $x = m$. Also ist x ein maximales Ideal in R. □

Beispiel 2.2.7 (die Zariski-Topologie auf affinen Räumen)**.** Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so sind die abgeschlossenen Punkte des affinen Raums $\mathbb{A}^n_K = \operatorname{Spec} K[X_1, \ldots, X_n]$ genau die Ideale der Form $(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ mit $x \in K^n$ (Satz 2.2.3).

Die Zariski-Toplogie ist eine Topologie, die gut zu zahlentheoretischen und algebraischen Eigenschaften passt; sie ist im allgemeinen *nicht* mit der naiven geometrischen Anschauung kompatibel:

Beispiel 2.2.8 (Abschluss des Nullideals)**.** Sei R ein Integritätsring. Dann ist das Nullideal 0 in R ein Primideal in R. Der Abschluss des Punktes 0 in $\operatorname{Spec} R$ ist ganz $\operatorname{Spec} R$. Deshalb haben wir den entsprechenden Punkt in $\operatorname{Spec} R$ auch immer so „dick“ gezeichnet. Man bezeichnet 0 auch als *generischen Punkt* von $\operatorname{Spec} R$.

Beispiel 2.2.9 (die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$)**.** Eine Teilmenge in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie eine endliche Teilmenge von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist oder ganz $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist, denn:

- Endliche Teilmengen von $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ sind in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ abgeschlossen, denn: Da die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass jede Einpunktmenge in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ abgeschlossen ist. Wegen $\operatorname{mSpec} \mathbb{Z} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist nach Proposition 2.2.6 jede Einpunktmenge in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ abgeschlossen.
- Sei $A \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ eine unendliche abgeschlossene Teilmenge. Dann ist $A = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, denn: Wir schreiben $A = V_{\mathbb{Z}}(a)$ mit $a \subset \mathbb{Z}$. Ist $x \in a$, so liegt x in unendlich vielen Primidealen von $\mathbb{Z}$. Also gibt es unendlich viele Primzahlen in $\mathbb{Z}$, die x teilen. Damit folgt aber $x = 0$, und damit $a \subset \{0\}$ bzw.
$$A = V_{\mathbb{Z}}(a) \supset V_{\mathbb{Z}}\big(\{0\}\big) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}.$$

Literaturaufgabe (the risky topology)**.** Lesen Sie *A year in the life of Sammy the Graduate Student* [12] Zum Beispiel ist die Formulierung „They use the risky topology“ ist ein Wortspiel, das auf die Zariski-Topologie verweist. Erkennen Sie auch noch weitere mathematische Fachbegriffe?

2.2.3 Affine algebraische Mengen und Radikale

Eines der Hauptziele der Algebra und der algebraischen Geometrie ist die Untersuchung von Lösungsmengen polynomialer Gleichungen. Solche Nullstellenmengen führen im einfachsten Fall zu affinen algebraischen Mengen:

Definition 2.2.10 (affine algebraische Menge)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$.

- Sei $F \subset K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist

$$\mathbf{V}_K(F) := \left\{ x \in K^n \;\middle|\; \forall_{f \in F} \quad f(x) = 0 \right\} \subset K^n$$

  die *durch F definierte (affine) algebraische Menge*.

  Eine Teilmenge $V \subset K^n$ ist eine *affine algebraische Menge*, wenn es eine Menge $F \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $V = \mathbf{V}_K(F)$ gibt.

- Ist $V \subset K^n$, so ist

$$\mathbf{I}_K(V) := \left\{ f \in K[X_1, \ldots, X_n] \;\middle|\; \forall_{x \in V} \quad f(x) = 0 \right\} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$$

  das *durch V definierte Verschwindungsideal* (dies ist tatsächlich ein Ideal; nachrechnen).

Caveat 2.2.11 (affine Varietäten)**.** Affine algebraische Mengen, die zusätzlich eine Irreduzibilitätsbedingung erfüllen, werden in der elementaren algebraischen Geometrie als *affine algebraische Varietäten* bezeichnet. Unsere Notation $\mathbf{V}$ erinnert dabei an den Begriff „Varietät“. Der Begriff der affinen algebraischen Varietät wird in der algebraischen Geometrie aber nicht ganz einheitlich verwendet – beim Umgang mit Literatur ist also etwas Vorsicht geboten.

Beispiel 2.2.12 (affine algebraische Mengen)**.** Die durch Polynome in $\mathbb{R}[X, Y]$ definierten affinen algebraischen Mengen

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y - X^2) = \mathbf{V}_{\mathbb{R}}((Y - X^2)^{2018}),\\
&\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X^2 + Y^2 - 4),\\
&\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X^3),\\
&\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(X \cdot Y),\\
&\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X^3 - X^2),\\
&\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y - X^2, Y + X)
\end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^2$ sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Algebraisch gesehen ist es vernünftiger, mit den entsprechenden algebraischen Mengen im Komplexen zu arbeiten. Für die Illustrationen ist es jedoch einfacher, nur den reellen Fall zu betrachten.

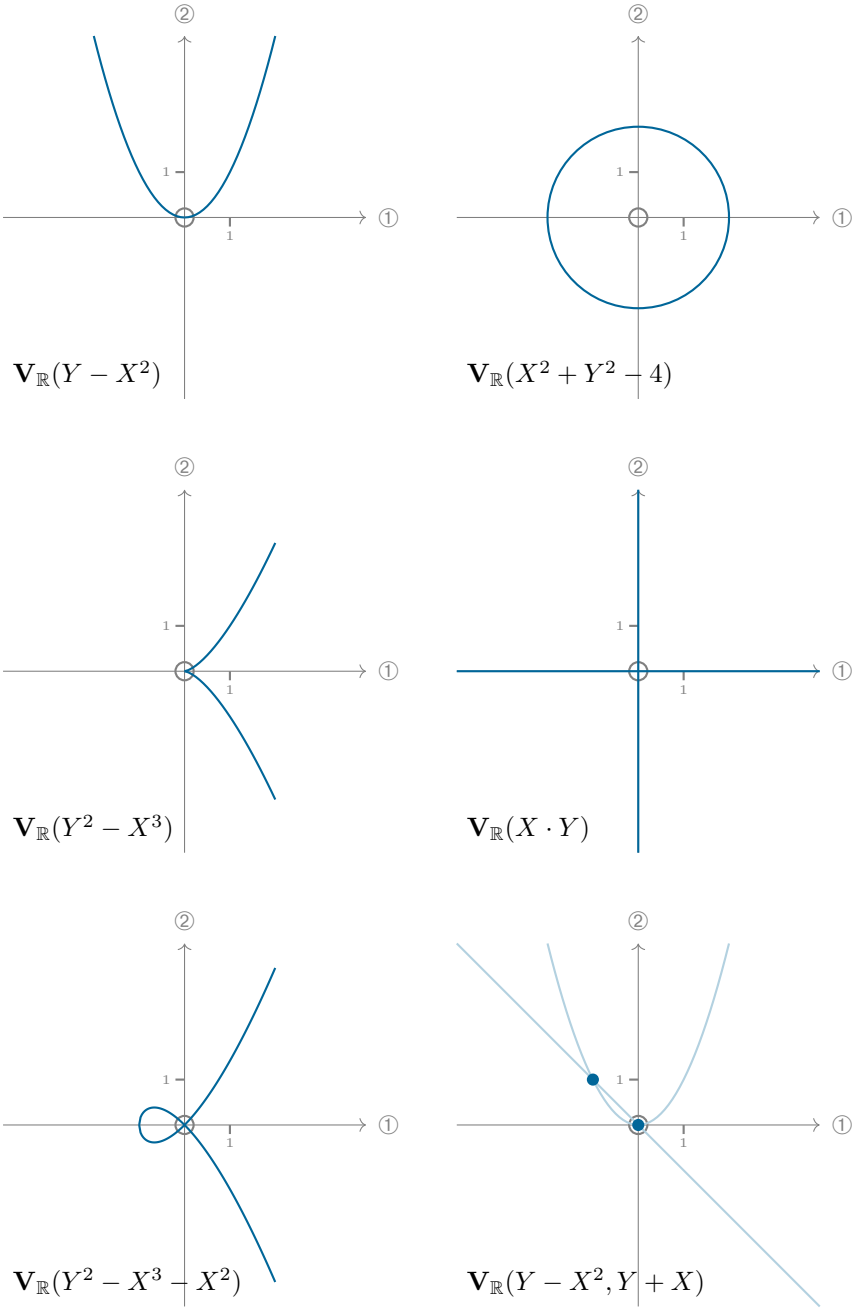


Abbildung 2.2.: Beispiele affiner algebraischer Mengen in $\mathbb{R}^2$

Ausblick 2.2.13 (Robotik)**.** In der Robotik werden unter anderem Roboterarme betrachtet, die aus verschiedenen, starren, Segmenten zusammengesetzt sind, die mithilfe von Gelenken mit unterschiedlichem Rotationsfreiraum verbunden sind. Der Raum der erreichbaren Punkte eines solchen Roboterarms kann oft als affine algebraische Menge (im Normalfall in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) beschrieben werden [6, Kapitel 6] (Übungsaufgabe).

Caveat 2.2.14 (großer Fermat)**.** Es ist im allgemeinen *nicht* einfach zu entscheiden, wie eine durch Polynome definierte affine algebraische Menge genau aussieht. Zum Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$. Dann ist

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}(X^n + Y^n - Z^n) \subset \mathbb{Q}^3$$

eng mit der Frage verwandt, ob es Zahlen $x, y, z \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$x^n + y^n = z^n$$

gibt. Es ist mittlerweile bekannt, dass es solche Zahlen *nicht* gibt [14], aber es ist bisher *kein* elementarer Beweis dafür bekannt.

Wir untersuchen nun, auf welche Weise affine algebraische Mengen mit der Ringtheorie (und insbesondere mit Prim- bzw. Maximalspektren) in Verbindung gebracht werden können.

Als ersten Schritt führen wir den Ring der polynomialen Funktionen auf einer affinen algebraischen Menge ein. Solche Funktionen sollten durch Polynome gegeben sein. Außerdem wollen wir solche Funktionen als gleich ansehen, wenn sie auf der gegebenen algebraischen Menge dieselben Funktionswerte annehmen. Dies führt zur folgenden Definition (falls der Grundkörper unendlich ist, stimmt diese Definition tatsächlich mit der vorigen Beschreibung überein):

Definition 2.2.15 (Koordinatenring)**.** Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei $V \subset K^n$ eine affine algebraische Menge. Dann ist der *Koordinatenring von* V definiert als

$$\mathbf{K}_K[V] := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathbf{I}_K(V).$$

Es stellen sich dabei die folgenden Fragen:

- Wie hängen (abgeschlossene) Punkte in $\operatorname{Spec}\mathbf{K}_K[V]$ mit der affinen algebraischen Menge V zusammen?
- Wie kann man Koordinatenringe/Verschwindungsideale berechnen?
- Wie invers zueinander sind die Operationen $\mathbf{V}_K$ und $\mathbf{I}_K$?

Wir werden diese Fragen mithilfe von Radikalen und dem starken Hilbertschen Nullstellensatz beantworten.

Die erste zentrale Beobachtung ist:

Bemerkung 2.2.16 (affine algebraische Mengen und Potenzen/Wurzeln)**.** Da Körper nullteilerfrei sind, liefern Potenzen/Wurzeln (falls existent) von Polynomen dieselbe affine algebraische Menge. Genauer: Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, sei $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gilt (nachrechnen)

$$\mathbf{V}_K(f^m) = \mathbf{V}_K(f).$$

Man führt daher den Begriff des Radikals ein:

Definition 2.2.17 (Radikal)**.** Sei R ein Ring und $a \subset R$ ein Ideal. Dann ist das *Radikal von* a definiert als

$$\sqrt[R]{a} := \{x \in R \mid \exists_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \quad x^n \in a\} \subset R.$$

Ist der Ring aus dem Kontext klar, so schreiben wir auch kurz $\sqrt{a}$ für $\sqrt[R]{a}$.

Bemerkung 2.2.18 (Radikale sind Ideale)**.** Ist R ein Ring und $a \subset R$ ein Ideal, so ist auch das Radikal $\sqrt[R]{a}$ ein Ideal in R, denn:

- Es ist $0 \in \sqrt[R]{a}$, da $0^1 \in a$.
- Sind $x, y \in \sqrt[R]{a}$, so ist $x \pm y \in \sqrt[R]{a}$ (dies folgt mithilfe der binomischen Formel; Übungsaufgabe): Wegen $x, y \in \sqrt[R]{a}$ gibt es $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $x^m \in a$ und $y^n \in a$. Dann ist

  $$\begin{aligned}(x+y)^{m+n} &= \sum_{j=0}^{m+n} \binom{m+n}{j} \cdot x^j \cdot y^{m+n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m+n}{j} \cdot x^j \cdot y^n \cdot y^{m-j} + \sum_{j=m+1}^{n} \binom{m+n}{j} \cdot x^m \cdot x^{j-m} \cdot y^{m+n-j}.\end{aligned}$$

  Die Summanden in der ersten Summe liegen in a, da $y^n \in a$; die Summanden in der zweiten Summe liegen in a, da $x^m \in a$. Analog folgt $(x-y)^{m+n} \in a$. Also ist $x \pm y \in \sqrt[R]{a}$.
- Sind $x \in \sqrt[R]{a}$ und $r \in R$, so ist $r \cdot x \in \sqrt[R]{a}$ (Übungsaufgabe).

Beispiel 2.2.19 (Radikale)**.** Sei R ein Ring.

- Ist $p \subset R$ ein Primideal, so ist $\sqrt[R]{p} = p$ (dies folgt induktiv aus der Primidealeigenschaft).
- Sind $a, b \subset R$ Ideale, so ist $\sqrt[R]{a \cap b} = \sqrt[R]{a} \cap \sqrt[R]{b}$ (nachrechnen).

Beispiel 2.2.20 (Radikale in $\mathbb{Z}$)**.** Ist $p \in \mathbb{Z}$ prim, so ist $\sqrt[\mathbb{Z}]{(p)} = (p)$ und für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ist (nachrechnen)

$$\sqrt[\mathbb{Z}]{(p^k)} = (p).$$

Außerdem gilt zum Beispiel

$$\sqrt[\mathbb{Z}]{(42)} = \sqrt[\mathbb{Z}]{(2)\cap(3)\cap(7)} = (2)\cap(3)\cap(7) = (42)$$
$$\sqrt[\mathbb{Z}]{(24)} = \sqrt[\mathbb{Z}]{(2^3)\cap(3)} = (2)\cap(3) = (6).$$

Mithilfe des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes und dem Begriff des Radikals erhalten wir die Antwort auf die Frage, inwieweit $\mathbf{I}_K$ und $\mathbf{V}_K$ invers zueinander sind:

Satz 2.2.21 (starker Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Ist $V \subset K^n$ eine affine algebraische Menge, so ist*

$$\mathbf{V}_K\big(\mathbf{I}_K(V)\big) = V.$$

2. *Ist $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal, so ist*

$$\mathbf{I}_K\big(\mathbf{V}_K(a)\big) = \sqrt{a}.$$

Beweis. Zu 1. Hierbei handelt es sich um den einfachen Teil, den man durch Nachrechnen zeigen kann (Übungsaufgabe).

Zu 2. Für diese Aussage benötigen wir den schwachen Hilbertschen Nullstellensatz (Satz 2.2.4): Wir beginnen mit der einfachen Inklusion: Es gilt

$$\sqrt{a} \subset \mathbf{I}_K\big(\mathbf{V}_K(a)\big),$$

denn: Sei $f \in \sqrt{a}$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $f^m \in a$. Für alle $x \in \mathbf{V}_K(a)$ folgt

$$\big(f(x)\big)^m = f^m(x) = 0,$$

und damit $f(x) = 0$. Also ist $f \in \mathbf{I}_K\big(\mathbf{V}_K(a)\big)$.

Sei umgekehrt $f \in \mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(a))$; ohne Einschränkung sei $f \neq 0$. Um zu zeigen, dass es ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $f^m \in a$ gibt, verwenden wir den folgenden Trick: Sei $i\colon K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ die kanonische Inklusion und sei

$$\widetilde{a} := \big(i(a) \cup \{1 - X_{n+1} \cdot i(f)\}\big) \subset K[X_1, \ldots, X_{n+1}].$$

Wir zeigen nun als Zwischenschritt, dass $\mathbf{V}_K(\widetilde{a}) = \emptyset$: Sei $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in K^{n+1}$. Dann ist $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \notin \mathbf{V}_K(\widetilde{a})$, denn: Es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

① Es ist $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{V}_K(a)$. In diesem Fall folgt wegen $f \in \mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(a))$, dass $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Also ist

$$\big(1 - X_{n+1} \cdot i(f)\big)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1 - x_{n+1} \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

und damit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \notin \mathbf{V}_K(\widetilde{a})$.

② Es ist $(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathbf{V}_K(a)$. In diesem Fall gibt es somit ein $g \in a$ mit $g(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Dann ist aber auch

$$i(g)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = g(x_1, \ldots, x_n) \neq 0,$$

und damit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \notin \mathbf{V}_K(\widetilde{a})$.

Also ist $\mathbf{V}_K(\widetilde{a}) = \emptyset$, wie behauptet.

Mit dem schwachen Hilbertschen Nullstellensatz (Satz 2.2.4) erhalten wir daraus $\widetilde{a} = K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Insbesondere ist $1 \in \widetilde{a}$; also gibt es $k \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_k \in a$, $g_1, \ldots, g_k, g \in K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ mit

$$1 = \sum_{j=1}^{k} g_j \cdot i(f_j) + g \cdot \big(1 - X_{n+1} \cdot i(f)\big).$$

Wegen $f \neq 0$ können wir im Quotientenkörper $Q(K[X_1, \ldots, X_n])$ den Wert $1/f$ für die Variable X_{n+1} einsetzen und bekommen so die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^{k} g_j\Big(X_1, \ldots, X_n, \frac{1}{f}\Big) \cdot f_j + g\Big(X_1, \ldots, X_n, \frac{1}{f}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{f} \cdot f\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} g_j\Big(X_1, \ldots, X_n, \frac{1}{f}\Big) \cdot f_j \end{aligned}$$

im Quotientenkörper $K(X_1, \ldots, X_n)$. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von f erhalten wir daraus eine Gleichung in $K[X_1, \ldots, X_n]$: Sei $m := \max\big\{\deg_{X_{n+1}}(g_j) \;\big|\; j \in \{1, \ldots, k\}\big\}$. Dann ist

$$\overline{g}_j := f^m \cdot g_j\Big(X_1, \ldots, X_n, \frac{1}{f}\Big)$$

für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein Element von $K[X_1, \ldots, X_n]$. Multiplikation der obigen Gleichung mit f^m liefert somit

$$f^m = \sum_{j=1}^{k} \overline{g}_j \cdot f_j \in a.$$

Insbesondere ist $f \in \sqrt{a}$. □

Beispiel 2.2.22 (Koordinatenringe)**.** Mit dem starken Hilbertschen Nullstellensatz (Satz 2.2.21) können wir Koordinatenringe berechnen (indem wir die Radikale mit Beispiel 2.2.19 analog zu Beispiel 2.2.20 bestimmen):

- Der Koordinatenring von $V := \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y - X^2)$: Das Ideal $(Y - X^2) \subset \mathbb{C}[X, Y]$ ist prim (direkt nachrechnen, oder in $\mathbb{C}[X][Y]$ oder $\mathbb{C}[Y][X]$

argumentieren). Also ist $\sqrt{(Y-X^2)} = (Y-X^2)$. Mit dem starken Hilbertschen Nullstellensatz erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[V] = \mathbb{C}[X,Y]/\sqrt{(Y-X^2)} = \mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2) \;&\cong\; \mathbb{C}[T]\\ [X] &\longmapsto T\\ [Y] &\longmapsto T^2\\ [X] &\longleftarrow\!\shortmid\; T.\end{aligned}$$

Dies stimmt mit der Anschauung überein, dass V nur eine algebraisch verformte komplexe Gerade ist (die ja den Koordinatenring $\mathbb{C}[T]$ besitzt; nachrechnen).

- Der Koordinatenring von $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X^2+Y^2-1)$ ist *nicht* isomorph zu $\mathbb{C}[T]$, denn: Da (X^2+Y^2-1) in $\mathbb{C}[X,Y]$ prim ist, ist

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_K[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X^2+Y^2-1)] &= \mathbb{C}[X,Y]/\sqrt{(X^2+Y^2-1)}\\ &= \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1).\end{aligned}$$

  Dieser Ring ist jedoch *nicht* isomorph zu $\mathbb{C}[T]$ [9, Blatt 8, Bonusaufgabe] (da er *nicht* faktoriell ist). Dies stimmt mit der Anschauung überein, dass $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X^2+Y^2-1)$ eine geschlossene Kurve ist und nicht einfach nur eine „krumm eingebettete“ Gerade.

- Der Koordinatenring von $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X\cdot Y)$ ist *kein* Integritätsring (und somit insbesondere nicht isomorph zu $\mathbb{C}[T]$), denn: Es gilt (da die Ideale (X) und (Y) in $\mathbb{C}[X,Y]$ prim sind)

$$\sqrt{(X\cdot Y)} = \sqrt{(X)\cap(Y)} = \sqrt{(X)}\cap\sqrt{(Y)} = (X)\cap(Y) = (X\cdot Y).$$

  Also erhalten $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X\cdot Y)] = \mathbb{C}[X,Y]/(X\cdot Y)$, und in diesem Ring ist

$$[X]\neq 0\neq [Y] \quad\text{und}\quad [X]\cdot[Y] = [X\cdot Y] = 0.$$

  Dies stimmt mit der Anschauung überein, dass $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X\cdot Y)$ aus zwei Geraden zusammengesetzt ist.

Allgemein erhalten wir für affine algebraische Mengen V die gewünschte Korrespondenz zwischen Punkten im geometrischen Objekt V und abgeschlossenen Punkten in $\operatorname{Spec}\mathbf{K}_K[V]$:

Korollar 2.2.23 (Punkte affiner algebraischer Mengen)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $n\in\mathbb{N}$ und sei $V\subset K^n$ eine affine algebraische Menge. Dann ist die folgende Abbildung bijektiv:*

$$\begin{aligned}V &\longrightarrow \operatorname{mSpec}\mathbf{K}_K[V] = \operatorname{mSpec}K[X_1,\ldots,X_n]/\mathbf{I}_K(V)\\ x &\longmapsto \big([X_1-x_1],\ldots,[X_n-x_n]\big)\end{aligned}$$

Beweis. Da V eine affine algebraische Menge in K^n ist, gibt es eine Teilmenge $F \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $V = \mathbf{V}_K(F) = \mathbf{V}_K(\sqrt{(F)})$.

Wir zerlegen die obige Abbildung nun in zwei Schritte: Einerseits zeigt die Korrespondenz zwischen K^n und maximalen Idealen in $K[X_1, \ldots, X_n]$ (Satz 2.2.3) zusammen mit einer einfachen Rechnung (nachrechnen), dass

$$\begin{aligned} \varphi\colon V = \mathbf{V}_K\big(\sqrt{(F)}\big) &\longrightarrow V_{K[X_1,\ldots,X_n]}\big(\sqrt{(F)}\big) \cap \operatorname{mSpec} K[X_1, \ldots, X_n] \\ x &\longmapsto (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) = \ker E_x \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

Andererseits liefert der starke Hilbertschen Nullstellensatz (Satz 2.2.21), dass $\mathbf{I}_K(V) = \mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K(F)) = \mathbf{I}_K(\mathbf{V}_K((F))) = \sqrt{(F)}$. Insbesondere ist

$$\mathbf{K}_K[V] = \mathbf{K}_K\big[\mathbf{V}_K(F)\big] = K[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{(F)}.$$

Sei $\pi\colon K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathbf{K}_K[V]$ die kanonische Projektion. Dann ist die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon \operatorname{mSpec} \mathbf{K}_K[V] &\longrightarrow V_{K[X_1,\ldots,X_n]}\big(\sqrt{(F)}\big) \cap \operatorname{mSpec} K[X_1, \ldots, X_n] \\ m &\longmapsto \pi^{-1}(m) \\ \pi(q) &\longmapsto\!\shortmid\ q \end{aligned}$$

bijektiv (Proposition 2.1.17).

Somit ist auch die Komposition $\psi^{-1} \circ \varphi$ bijektiv. Diese Komposition ist genau die Abbildung aus der Behauptung. □

Bemerkung 2.2.24 (über die zusätzlichen Punkte im affinen Raum)**.** Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $p \in \mathbb{A}^n_K = \operatorname{Spec} K[X_1, \ldots, X_n]$ und $V := \mathbf{V}_K(p) \subset K^n$. Dann ist $\sqrt{p} = p$ und der Abschluss von $\{p\}$ in $\mathbb{A}^n_k$ bezüglich der Zariski-Topologie ist

$$A := V_{K[X_1,\ldots,X_n]}(p) = V_{K[X_1,\ldots,X_n]}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{A}^n_K.$$

Die Argumente aus dem Beweis von Korollar 2.2.23 zeigen, dass

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow A \cap \operatorname{mSpec} K[X_1, \ldots, X_n] \\ x &\longmapsto (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) \end{aligned}$$

bijektiv ist. Der affine Raum $\mathbb{A}^n_K$ enthält also neben den Punkten aus K^n (in Form der maximalen Ideale) zusätzlich auch noch Punkte zu den affinen algebraischen Mengen, die durch Primideale definiert werden (Abbildung 2.3).

In der algebraischen Geometrie betrachtet man daher statt affiner algebraischer Mengen $V \subset K^n$ im Normalfall die „erweiterte Punktmenge“ $\operatorname{Spec} \mathbf{K}_K[V]$.

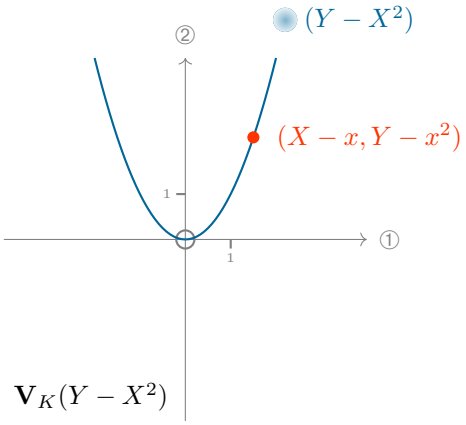


Abbildung 2.3.: über die zusätzlichen Punkte im affinen Raum, schematisch

Ausblick 2.2.25 (Morphismen von affinen algebraischen Mengen)**.** Der nächste Schritt bei der systematischen Untersuchung affiner algebraischer Mengen ist die Definition eines geeigneten Morphismenbegriffs, basierend auf „polynomialen Abbildungen“: Sei K ein Körper (der Einfachheit algebraisch abgeschlossen), seien $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $V \subset K^n$, $W \subset K^m$ affine algebraische Mengen. Ein *Morphismus* $V \longrightarrow W$ ist eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$, für die es Polynome $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$\forall_{x \in V \subset K^n} \quad f(x) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

gibt; Abbildungen dieser Art korrespondieren genau zu Ringhomomorphismen

$$\mathbf{K}_K[W] \longrightarrow \mathbf{K}_K[V].$$

Der Zusammenhang zwischen affinen algebraischen Mengen und Verschwindungsidealen bzw. Koordinatenringen liefert dann eine (kontravariante) Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der affinen algebraischen Mengen über K und der Kategorie der endlich erzeugten K-Algebren.

Ausblick 2.2.26 (Schemata)**.** Affine algebraische Mengen sind geometrisch betrachtet verwandt mit eingebetteten (bzw. immersierten) Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$. Analog zur intrinsischen Beschreibung von (glatten) Mannigfaltigkeiten als topologische Räume,

- die lokal zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind (und hausdorffsch sind und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen), und
- für die man durch Karten und kompatible Kartenwechsel lokal erklären kann, was glatte Funktionen sind,

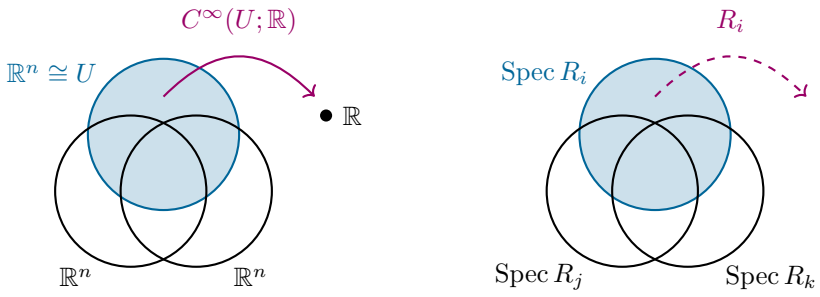


Abbildung 2.4.: glatte Mannigfaltigkeiten vs. Schemata

kann man auch durch geeignetes „Verkleben“ von Primspektren von Ringen, geometrische Objekte und „reguläre Funktionen“ darauf konstruieren (Abbildung 2.4). Dies sind sogenannte *Schemata*.

Wesentliche Unterschiede zu Mannigfaltigkeiten sind:

- *nicht* jedes Schema kann in einen geeigneten affinen Raum eingebettet werden
- die lokalen Modelle (d.h. die Primspektren) sind viel diverser und komplizierter als der lokale Fall (d.h. $\mathbb{R}^n$) für Mannigfaltigkeiten.

An vielen Stellen kann man aber mit geeigneten Varianten der klassischen analytischen Konstruktionen interessante Invarianten für Schemata konstruieren. All dies – und der Zusammenhang davon mit der Geometrie von Lösungsmengen polynomialer Gleichungen – ist Gegenstand der modernen algebraischen bzw. arithmetischen Geometrie.

Grob gesagt befasst sich die algebraische Geometrie mit Lösungsmengen polynomialer Gleichungen Körpern. Die arithmetische Geometrie befasst sich mit der Geometrie von Lösungsmengen polynomialer Gleichungen über allgemeinen Ringen, insbesondere den Ringen ganzer Zahlen aus der Zahlentheorie.

Literaturaufgabe (Schwerpunkte)**.** Bei dieser Gelegenheit sollten Sie auch die folgenden Fragen beantworten: Welche Forschungsschwerpunkte gibt es an der Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg? Welche Professoren gehören zu welchen Schwerpunkten?

Der Vollständigkeit halber gehen wir noch auf ein paar wichtige Eigenschaften von speziellen Radikalen ein:

Definition 2.2.27 (nilpotent)**.** Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ ist *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $x^n = 0$ gibt.

Die Menge aller nilpotenten Elemente ist das sogenannte Nilradikal des Rings:

Proposition 2.2.28 (Nilradikal und Primideale). *Sei R ein Ring. Dann gilt für das* Nilradikal $\sqrt[R]{0} \subset R$*:*

$$\sqrt[R]{0} = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p.$$

Beweis. Die Primeigenschaft liefert $\sqrt[R]{0} \subset \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p$ (Übungsaufgabe).

Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in R \setminus \sqrt[R]{0}$. Indem man das Lemma von Zorn (Satz I.3.3.19) auf die Menge der Ideale in R anwendet, die disjunkt zu $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind, erhält man die Existenz eines Primideals $p \subset R$ mit $x \notin p$ (Übungsaufgabe). □

Der Restklassenring zum Nilradikal liefert den „größten“ Restklassenring von R ohne nilpotente Elemente.

Proposition 2.2.29 (universelle Eigenschaft des Nilradikals). *Sei R ein Ring.*

1. *Der Ring $R/\sqrt{0}$ enthält außer 0 keine nilpotenten Elemente.*
2. *Ist S ein Ring, der außer 0 keine nilpotenten Elemente enthält, und ist $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\overline{f}\colon R/\sqrt{0} \longrightarrow S$ mit*

$$\overline{f} \circ \pi = f$$

(wobei $\pi\colon R \longrightarrow R/\sqrt{0}$ die kanonische Projektion bezeichnet).

Beweis. Beide Aussagen folgen durch einfache Rechnungen aus der Definition des Nilradikals (Übungsaufgabe). □

Beispiel 2.2.30 (noch ein Koordinatenring). Ist R ein Ring und ist $a \subset R$ ein Ideal, für das R/a außer Null keine nilpotenten Elemente enthält, so ist $\sqrt[R]{a} = a$, denn: Es gilt dann (nachrechnen)

$$\sqrt[R]{a} = \pi^{-1}\big(\sqrt[R/a]{0}\big) = \pi^{-1}\big(\{0\}\big) = a$$

wobei $\pi\colon R \longrightarrow R/a$ die kanonische Projektion bezeichnet.

Wir verwenden dies, um den Koordinatenring der affinen algebraischen Menge $V := \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y - X^2, Y + X) \subset \mathbb{C}^2$ zu bestimmen: Es ist (Übungsaufgabe; eine Variable eliminieren, Chinesischen Restsatz anwenden)

$$\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2, Y + X) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Da der Ring $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ keine nilpotenten Elemente außer der Null enthält, folgt

$$\sqrt{(Y - X^2, Y + X)} = (Y - X^2, Y + X),$$

und damit (starker Hilbertscher Nullstellensatz; Satz 2.2.21)

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[V] &= \mathbb{C}[X,Y]/\sqrt{(Y-X^2, Y+X)} = \mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2, Y+X)\\ &\cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}\times\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Dies stimmt mit der Anschauung überein, dass die affine algebraische Menge $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y-X^2, Y+X)$ aus zwei einzelnen Punkten besteht.

Ersetzt man in der Beschreibung des Nilradikals als Durchschnitt aller Primideale (Proposition 2.2.28) das Primspektrum durch das Maximalspektrum, so erhält man den Begriff des Jacobson-Radikals:

Proposition 2.2.31 (Jacobson-Radikal)**.** *Sei R ein Ring. Man bezeichnet*

$$J(R) := \bigcap_{m\in \mathrm{mSpec}\, R} m$$

als Jacobson-Radikal *von R. Sei $x\in R$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es ist $x\in J(R)$.*
2. *Für alle $y\in R$ ist $1-x\cdot y$ eine Einheit in R.*

Beweis. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Sei $x\in J(R)$ und $y\in R$. Dann ist $1-x\cdot y$ eine Einheit in R, denn: *Angenommen,* $1-x\cdot y$ wäre *keine* Einheit in R. Dann gäbe es ein maximales Ideal $m\subset R$ mit $(1-x\cdot y)\subset m$ (Satz 2.1.8). Wegen $x\in J(R)$ ist $x\in m$. Also folgt auch

$$1 = 1-x\cdot y+x\cdot y\in m,$$

im Widerspruch zu $m\neq R$ (da m ein maximales Ideal ist). Also ist $1-x\cdot y$ eine Einheit in R.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1. Sei umgekehrt $x\in R\setminus J(R)$. Dann gibt es ein $y\in R$ mit der Eigenschaft, dass $1-x\cdot y$ *keine* Einheit in R ist, denn: Wegen $x\in R\setminus J(R)$ gibt es ein maximales Ideal $m\subset R$ mit $x\notin m$. Also ist $(m\cup\{x\}) = R$. Insbesondere gibt es $z\in m$ und $y\in R$ mit

$$z+y\cdot x = 1$$

bzw. $1-x\cdot y = z\in m$. Wegen $m\neq R$ ist daher $1-x\cdot y$ *keine* Einheit in R. □

Ausblick 2.2.32 (subdirekte Produkte)**.** Sei R ein Ring. Man kann zeigen, dass $R/\sqrt{0}$ ein sogenanntes subdirektes Produkt von Integritätsringen ist. Analog ist $R/J(R)$ ein subdirektes Produkt von Körpern. Daher spielen das Nilradikal und das Jacobson-Radikal eine wichtige Rolle bei der Klassifikation von Ringen.

2.3 Dimension

Eine zentrale Invariante der klassischen Geometrie und der Linearen Algebra ist die Dimension. Dimensionsbegriffe sind Präzisierungen der naiven „Anzahl der Freiheitsgrade“ bzw. der „Schachtelungskomplexität von Unterobjekten“. Zum Beispiel: Ist K ein Körper und V ein K-Vektorraum, so ist die Dimension von V

- die maximale Größe einer über K linear unabhängigen Familie in V („Anzahl der Freiheitsgrade“)
- und die maximale Länge einer Kette von (nicht-trivialen) Untervektorräumen in V („Schachtelungskomplexität“).

Wir werden nun die (Krull-)Dimension eines Ringes über die Schachtelungskomplexität des Primspektrums einführen und zeigen, dass sie mit der algebraischen Anzahl der Freiheitsgrade (d.h. mit dem Transzendenzgrad) zusammenhängt.

2.3.1 Die Dimension eines Rings

Wir definieren die Dimension von Ringen über die Schachtelungskomplexität von Primidealen:

Definition 2.3.1 (Dimension)**.** Sei $R \neq 0$ ein Ring. Die *Dimension von R* (auch *Krull-Dimension von R*) ist definiert als

$$\dim R := \sup\big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; \exists_{p_0,\dots,p_n \in \operatorname{Spec} R} \quad p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n\big\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Außerdem setzt man $\dim 0 := -\infty$.

Beispiel 2.3.2 (Dimension von Ringen)**.**

- Ist K ein Körper, so ist $\dim K = 0$.
- Ist R ein Hauptidealring, so ist $\dim R \leq 1$ (nachrechnen).
- Es gilt $\dim \mathbb{Z} = 1$, denn: Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist $\dim \mathbb{Z} \leq 1$. Wegen $(0) \subsetneq (2)$ ist $\dim \mathbb{Z} \geq 1$. Also ist $\dim \mathbb{Z} = 1$.

  Analog folgt: Ist K ein Körper, so ist $\dim K[T] = 1$ (nachrechnen).
- Ist R ein Ring und ist $a \subset R$ ein Ideal, so gilt

$$\dim R/a \leq \dim R,$$

denn: Dies folgt aus der Tatsache, dass die von der kanonischen Projektion $R \longrightarrow R/a$ induzierte Bijektion $\operatorname{Spec} R/a \longrightarrow V_R(a) \subset \operatorname{Spec} R$ aus Proposition 2.1.17 mit der Inklusion von Idealen verträglich ist.

- Sind R und S Ringe, so ist

$$\dim R \times S = \max(\dim R, \dim S),$$

denn: Die Projektionen $R \times S \longrightarrow R$ und $R \times S \longrightarrow S$ induzieren eine (mit Inklusion von Idealen verträgliche) Bijektion (nachrechnen)

$$\operatorname{Spec} R \sqcup \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R \times S.$$

Die Geometrie legt nahe, dass für jeden Körper K und $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $\dim K[X_1, \ldots, X_n] = n$ gilt. Als Vorbereitung leiten wir erste Abschätzungen für die Dimension von Polynomringen in einer Variablen her.

2.3.2 Polynomringe in einer Variablen

Im allgemeinen sind untere Abschätzungen der Dimension leichter anzugeben als obere Abschätzungen (für untere Abschätzungen genügt eine geeignete Schachtelung von Primidealen; für obere Abschätzungen muss man die Menge *aller* Primideale hinreichend gut verstehen).

Proposition 2.3.3 (untere Abschätzung für die Dimension von Polynomringen)**.** *Ist R ein Ring, so ist*

$$\dim R[T] \geq \dim R + 1.$$

Als Hilfsmittel betrachten wir die folgende Erweiterung von Idealen im Grundring zu Idealen im Polynomring:

Lemma 2.3.4. *Sei R ein Ring. Ist $a \subset R$ ein Ideal, so schreiben wir*

$$a[T] := \left\{ \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot T^j \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_k \in p \right\} \subset R[T]$$

für das von a in $R[T]$ erzeugte Ideal. Dann gilt:

1. *Die kanonische Abbildung $R[T] \longrightarrow (R/a)[T]$ induziert einen Isomorphismus $R[T]/a[T] \longrightarrow (R/a)[T]$ von Ringen.*
2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} R &\longrightarrow \operatorname{Spec} R[T] \\ p &\longmapsto p[T] \end{aligned}$$

ist eine wohldefinierte Injektion.

Beweis. Zu 1. Man kann dies von Hand nachrechnen. Alternativ kann man auch wie folgt vorgehen: Unter dem kanonischen Isomorphismus $R[T] \otimes_R R \longrightarrow R[T]$ korrespondiert $R[T] \otimes_R a$ zu $a[T]$. Da $R[T] \otimes_R \cdot$ mit Quotienten verträglich ist (Korollar 1.5.13), folgt

$$\begin{aligned} R[T]/a[T] &\cong_{R[T]} (R[T] \otimes_R R)/(R[T] \otimes_R a) \cong_{R[T]} R[T] \otimes_R (R/a) \\ &\cong_{R[T]} (R/a)[T]; \end{aligned}$$

außerdem ist dieser Isomorphismus mit der multiplikativen Struktur verträglich.

Zu 2. Ist $p \subset R$ ein Primideal, so ist auch $p[T]$ ein Primideal, denn: Nach dem ersten Teil ist $R[T]/p[T] \cong_{\mathsf{Ring}} (R/p)[T]$. Da p ein Primideal ist, ist R/p ein Integritätsring; also ist auch $(R/p)[T]$ ein Integritätsring. Da $R[T]/p[T]$ somit ein Integritätsring ist, ist $p[T]$ ein Primideal in $R[T]$ (Satz 2.1.6).

Die Erweiterungsabbildung $p \mapsto p[T]$ ist injektiv, denn: Ist $i\colon R \longrightarrow R[T]$ die Inklusion, so folgt

$$\operatorname{Spec} i\big(p[T]\big) = p[T] \cap i(R) = p$$

für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ (nachrechnen). Also besitzt $p \mapsto p[T]$ ein linksseitiges Inverses (nämlich $\operatorname{Spec} i$) und ist somit injektiv. □

Beweis von Proposition 2.3.3. Sei $n := \dim R$; ohne Einschränkung sei n endlich. Dann gibt es eine Schachtelung $p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n$ in $\operatorname{Spec} R$. Also ist $p_0[T] \subset \cdots \subset p_n[T]$ und nach Lemma 2.3.4 ist

$$p_0[T] \subsetneq \cdots \subsetneq p_n[T]$$

eine Schachtelung in $\operatorname{Spec} R[T]$.

Wir erweitern diese Schachtelung um einen Schritt: Sei $q := \operatorname{Spec} E_0(p_n)$, wobei $E_0\colon R[T] \longrightarrow R$ den Einsetzungshomomorphismus zu $0 \in R$ bezeichne. Dann ist

$$p_n[T] \subset E_0^{-1}(p_n) = \operatorname{Spec} E_0(p_n) = q.$$

Außerdem gilt $p_n[T] \neq q$, denn $T \in q$ aber $T \notin p_n[T]$ (sonst wäre $1 \in p_n$).

Die Schachtelung $p_0[T] \subsetneq p_1[T] \cdots \subsetneq p_n[T] \subsetneq q$ zeigt somit, dass $\dim R[T] \geq n + 1 = \dim R + 1$. □

Caveat 2.3.5. Ist R ein (nicht-trivialer) Ring, so gilt im allgemeinen *nicht* die naive Gleichung $\dim R[T] = \dim R + 1$: Es gibt zum Beispiel Ringe R mit $\dim R = 1$ und $\dim R[T] = 3$ (Übungsaufgabe).

Satz 2.3.6 (Dimension von Polynomringen über Hauptidealringen)**.** *Sei R ein Hauptidealring. Dann ist*

$$\dim R[T] \leq 2.$$

Zum Beispiel gibt dies eine Rechtfertigung für die bereits angedeutete Zweidimensionalität in Beispiel 2.1.13:

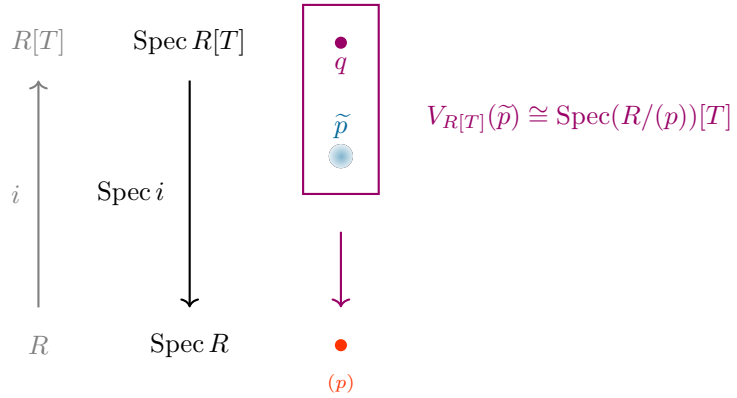


Abbildung 2.5.: Primideale in $R[T]$, die über $(p) \in \operatorname{Spec} R$ liegen; schematisch

Beispiel 2.3.7. Es gilt $\dim \mathbb{Z}[T] = 2$, denn: Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist $\dim \mathbb{Z}[T] \leq 2$ (Satz 2.3.6. Andererseits liefern Proposition 2.3.3 und Beispiel 2.3.2, dass

$$\dim \mathbb{Z}[T] \geq \dim \mathbb{Z} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Außerdem zeigt die Klassifikation im Beweis von Satz 2.3.6, dass alle Primideale in $\mathbb{Z}[T]$ von der in Beispiel 2.1.13 angegebenen Form sind.

Analog folgt: Ist K ein Körper, so ist $\dim K[X, Y] = 2$.

Beweis von Satz 2.3.6. Wir beweisen diese Aussage, indem wir die Primideale in $R[T]$ explizit klassifizieren: Sei $i\colon R \longrightarrow R[T]$ die kanonische Inklusion. Als Einstieg in die Klassifikation verwenden wir die auf den Primspektren induzierte Abbildung $\operatorname{Spec} i\colon \operatorname{Spec} R[T] \longrightarrow \operatorname{Spec} R$. Sei $q \subset R[T]$ ein Primideal und $(p) := \operatorname{Spec} i(q) = q \cap R$ das zugehörige (Haupt-)Primideal in R.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

① Es ist $p \neq 0$ (und damit p ein Primelement in R). Wir betrachten das zugehörige erweiterte Primideal $\widetilde{p} := (p)[T] \in \operatorname{Spec} R[T]$ (Lemma 2.3.4) und die kanonische Projektion $\pi\colon R[T] \longrightarrow R[T]/\widetilde{p}$. Dann ist $q \in V_{R[T]}(\widetilde{p})$ und nach Proposition 2.1.17 induziert die Abbildung $\operatorname{Spec} \pi$ eine Bijektion $\operatorname{Spec} R[T]/\widetilde{p} \longrightarrow V_{R[T]}(p[T])$ (Abbildung 2.5).

Der Ring $R[T]/\widetilde{p}$ ist ein Hauptidealring, denn: Da R ein Hauptidealring ist, ist (p) ein maximales Ideal in R. Insbesondere ist $R/(p)$ ein Körper, und damit ist auch $R/\widetilde{p} \cong_{\mathsf{Ring}} (R/(p))[T]$ (Lemma 2.3.4) ein Hauptidealring.

Also gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten für q:

– Es ist $q = \operatorname{Spec} \pi(0) = \widetilde{p} = (i(p))$ oder

– es ist $q = \operatorname{Spec}\pi(0)(([f])) = (i(p), f)$, wobei $f \in R[T]$ ein Polynom ist, für das die Reduktion $[f]$ modulo p irreduzibel in $(R/(p))[T]$ ist.

② Es ist $p = 0$. Sei $j\colon R \longrightarrow Q(R)$ die Inklusion in den Quotientenkörper von R. Dann ist $\overline{q} := (j(q)) \subset Q(R)[T]$ ein Primideal (nachrechnen). Da $Q(R)[T]$ ein Hauptidealring ist, tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

– Es gibt ein Primelement $f \in Q(R)[T]$ mit $\overline{q} = (f)$; dann gibt es ein primitives Polynom $\widetilde{f} \in R[T]$, für das $j(\widetilde{f})$ zu f assoziiert ist (Nenner wegmultiplizieren), und es gilt $p = (\widetilde{f})$ (nachrechnen).

– Oder es ist $\overline{q} = (0)$, und damit $q = (0)$.

Die obige Klassifikation zeigt, dass die einzigen echten Schachtelungen von Primidealen in $R[T]$ (Teile von Schachtelungen) von den folgenden beiden Typen sind:

- von der Form (mit einem Primelement $p \in R$ und einem Polynom $f \in R[T]$, dessen Reduktion modulo p irreduzibel ist)

$$(0) \subsetneq \big(i(p)\big) \subsetneq \big(i(p), f\big)$$

- oder von der Form (mit einem Primelement $p \in R$ und einem primitiven Polynom $f \in R[T]$, das in $Q(R)[T]$ irreduzibel ist und dessen Reduktion modulo p irreduzibel ist)

$$(0) \subsetneq (f) \subsetneq \big(i(p), f\big).$$

Also ist $\dim R[T] \leq 2$. □

Im allgemeinen lässt sich die Dimension des Polynomrings $R[T]$ über einem Ring R *nicht* ohne weiteres aus $\dim R$ berechnen (Caveat 2.3.5). Zumindest gilt aber stets die folgende Abschätzung:

Satz 2.3.8 (Abschätzung der Dimension von Polynomringen)**.** *Sei R ein Ring. Dann ist*

$$\dim R + 1 \leq \dim R[T] \leq 2 \cdot \dim R + 1.$$

Ähnlich zum Beweis von Satz 2.3.6 zerlegen wir $\operatorname{Spec} R[T]$ in die „Fasern“ über $\operatorname{Spec} R$ und verwenden dazu als Einstieg die von der Inklusion $R \longrightarrow R[T]$ induzierte Abbildung auf den Primspektren. Die wesentliche Beobachtung dabei ist, dass nicht zu viele geschachtelte Primideale in $R[T]$ über einem gegebenen Primideal in R liegen können. Wie im Beweis von Satz 2.3.6 ist es außerdem nötig, Primideale in Polynomringen mit Primidealen in Polynomringen über Quotientenkörpern zu vergleichen.

Lemma 2.3.9. *Sei R ein Integritätsring. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}\big\{q \in \operatorname{Spec} R[T] \;\big|\; q \cap R = (0)\big\} &\longrightarrow \operatorname{Spec} Q(R)[T] \\ q &\longmapsto \overline{q} := \big\{x \cdot f \;\big|\; x \in Q(R), f \in q\big\}\end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv.

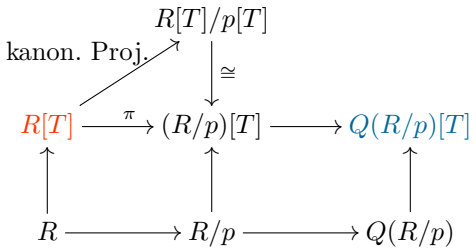
Beweis. Man kann dies Schritt für Schritt nachrechnen. Alternativ erhält man dies aber auch bequem aus einem allgemeinen Lokalisierungsargument (Beispiel 3.3.5). □

Lemma 2.3.10. *Sei R ein Ring und seien $q_0, q_1, q_2 \in \operatorname{Spec} R[T]$ mit*

$$q_0 \subset q_1 \subset q_2 \quad \textit{und} \quad q_0 \cap R = q_1 \cap R = q_2 \cap R.$$

Dann ist $q_0 = q_1$ oder $q_1 = q_2$.

Beweis. Wir schreiben $p := q_0 \cap R = q_1 \cap R = q_2 \cap R$ für das zugehörige Primideal in R. Da p prim ist, ist R/p ein Integritätsring und besitzt somit einen Quotientenkörper $Q(R/p)$. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm kanonischer Abbildungen (um uns auf den gut verstandenen Fall von Polynomringen über Körpern zurückzuziehen):



Nach Lemma 2.3.4, Proposition 2.1.17 und Lemma 2.3.9 ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi\colon \big\{q \in \operatorname{Spec} R[T] \;\big|\; q \cap R = p\big\} &\longrightarrow \operatorname{Spec} Q(R/p)[T] \\ q &\longmapsto \overline{\pi(q)}\end{aligned}$$

wohldefiniert, injektiv und mit Inklusionen von Idealen verträglich. Da aber $Q(R/p)[T]$ ein Hauptidealring ist, ist $\dim Q(R/p)[T] \leq 1$, und damit

$$\varphi(q_0) = \varphi(q_1) \quad \text{oder} \quad \varphi(q_1) = \varphi(q_2).$$

Mit der Injektivität von φ erhalten wir daraus $q_0 = q_1$ oder $q_1 = q_2$. □

Beweis von Satz 2.3.8. Die untere Abschätzung $\dim R + 1 \leq \dim R[T]$ haben wir bereits in Proposition 2.3.3 gezeigt.

Für die obere Abschätzung verwenden wir die obigen Vorbereitungen: Sei $n := \dim R[T]$ (ohne Einschränkung $n \in \mathbb{N}$), sei $q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n$ eine Schachtelung in $\operatorname{Spec} R[T]$ und seien $p_j := q_j \cap R \in \operatorname{Spec} R$ die darunterliegenden Primideale in R. Dann gilt

$$p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n.$$

Nach Lemma 2.3.10 sind dies mindestens $(n+1)/2$ verschiedene Primideale in R. Also ist

$$\dim R \geq \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{\dim R[T]+1}{2} - 1,$$

und damit $\dim R[T] \leq 2 \cdot (\dim R + 1) - 1 = 2 \cdot \dim R + 1$. □

2.3.3 Polynomringe in mehreren Variablen

Es gibt viele Wege, die Dimension von Polynomringen in mehreren Variablen über Körpern zu berechnen. Die meisten verwenden Techniken über ganze Ringerweiterungen (und beweisen dann auch allgemeinere Aussagen). Wir werden im folgenden einen elementaren Beweis verwenden, der auf dem folgenden (erst in 2005 publizierten ...) Kriterium beruht:

Satz 2.3.11 (Dimensionskriterium von Coquand und Lombardi [5]). *Sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gilt* $\dim R \leq n$.
2. *Für alle $x_0, \ldots, x_n \in R$ gibt es $k_0, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ und $y_0, \ldots, y_n \in R$ mit*

$$x_0^{k_0} \cdot \Big(\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \big(x_n^{k_n} \cdot (1 + x_n \cdot y_n) + x_{n-1} \cdot y_{n-1} \big) \cdots + x_0 \cdot y_0 \Big) = 0.$$

Wir werden diese zunächst etwas merkwürdig erscheinende Charakterisierung mithilfe von Lokalisierung beweisen (Kapitel 3.3.2); die Terme der Form $x_j^{k_j}$ haben dabei etwas mit der Behandlung von Nilpotenz zu tun, die Terme der Form $\cdots + x_j \cdot y_j$ etwas mit der Behandlung von invertierbaren Elementen.

Das Dimensionskriterium von Coquand und Lombardi liefert einen Zusammenhang zwischen „algebraischen Freiheitsgraden“ und der Dimension. Die algebraischen Freiheitsgrade werden dabei durch den Transzendenzgrad formalisiert:

Sei K ein Körper. Wir erinnern an den Begriff der K-Algebra: Eine *K-Algebra* ist ein Ring R zusammen mit einem Ringhomomorphismus $K \longrightarrow R$. (Äquivalent kann man eine K-Algebra auch als Ring mit einer mit der Multiplikation verträglichen K-Vektorraumstruktur einführen.)

Definition 2.3.12 (algebraische unabhängig, Transzendenzgrad). Sei K ein Körper und sei R eine K-Algebra.

- Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $x_1, \ldots, x_n \in R$, so ist die Familie $(x_1, \ldots, x_n)$ *über K algebraisch abhängig*, wenn es ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

  gibt. Andernfalls heißt die Familie *über K algebraisch unabhängig.*

- Der *Transzendenzgrad von R über K* ist definiert als

$$\operatorname{trdeg}_K R := \sup\big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; \exists_{x_1,\ldots,x_n \in R} \quad (x_1, \ldots, x_n) \text{ ist über } K \text{ algebraisch unabhängig}\big\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Beispiel 2.3.13 (algebraische (Un)Abhängigkeit)**.** Der Körper $\mathbb{C}$ ist in kanonischer Weise eine $\mathbb{Q}$-Algebra.

- Die Familie in $\mathbb{C}$, die nur aus $\sqrt{2}$ besteht, ist über $\mathbb{Q}$ algebraisch abhängig, denn $(T^2 - 2)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 2 = 0$.

- Die Familie in $\mathbb{C}$, die nur aus π besteht, ist über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängig [11, Kapitel 21].

- Die Familie (π, π^2) in $\mathbb{C}$, ist über $\mathbb{Q}$ algebraisch abhängig (man betrachte $X_1^2 - X_2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$).

- Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so ist die Familie $(X_1, \ldots, X_n)$ im Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ algebraisch unabhängig (nach Konstruktion des Polynomrings).

Proposition 2.3.14 (Transzendenzgrad von Polynomringen)**.** *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \ldots, X_n] = n.$$

Beweis. Die Familie $(X_1, \ldots, X_n)$ zeigt $\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \ldots, X_n] \geq n$.

Es bleibt also noch $\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \ldots, X_n] \leq n$ zu zeigen. Wir verwenden dazu ein elementares Zählargument: *Angenommen,* es gäbe eine Familie $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$, die über K algebraisch unabhängig ist. Dann ist der durch Einsetzen von $y_1, \ldots, y_{n+1}$ gegebene K-Algebrenhomomorphismus

$$E\colon K[Y_1, \ldots, Y_{n+1}] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]$$

injektiv. Wir verwenden nun ein einfaches Zählargument, um einen Widerspruch abzuleiten: Sei $d := \max(\deg y_1, \ldots, \deg y_{n+1})$ (wobei deg den Totalgrad bezeichne); zu $k \in \mathbb{N}$ sei $P_k \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ der K-Untervektorraum der Polynome vom Totalgrad höchstens $d \cdot k$ und $\widetilde{P}_k \subset K[Y_1, \ldots, Y_{n+1}]$ der K-Untervektorraum der Polynome vom Totalgrad höchstens k. Nach Konstruktion ist $E(\widetilde{P}_k) \subset P_k$ und die Injektivität von E liefert somit

$$\dim_K \widetilde{P}_k = \dim_K E(\widetilde{P}_k) \leq \dim_K P_k.$$

Für hinreichend große Werte von k führt dies aber zu einem Widerspruch, denn:

- Einerseits wird P_k von allen Monomen vom Totalgrad höchstens $d \cdot k$ erzeugt; also ist (sehr grobe Abschätzung!)

$$\dim_K P_k \leq (d \cdot k + 1)^n.$$

- Andererseits enthält $\widetilde{P}_k$ mindestens $\lfloor k/n+1 \rfloor^{n+1}$ verschiedene Monome. Also ist (auch ziemlich grob ...)

$$\dim P_k \geq \dim_K \widetilde{P}_k \geq \Big\lfloor \frac{k}{n+1} \Big\rfloor^{n+1}.$$

Also ist $\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \ldots, X_n] \leq n$. □

Wir wenden nun das Dimensionskriterium von Coquand und Lombardi an:

Korollar 2.3.15 (Dimension und Transzendenzgrad)**.** *Sei K ein Körper und sei R eine K-Algebra. Dann ist*

$$\dim R \leq \operatorname{trdeg}_K R.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $n := \operatorname{trdeg}_K R$ endlich. Wir verwenden das Dimensionskriterium (Satz 2.3.11), um $\dim R \leq n$ zu zeigen: Seien also $x_0, \ldots, x_n \in R$. Wegen $\operatorname{trdeg}_K R = n$ gibt es ein $f \in K[X_0, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ mit $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Wir sortieren nun die Monome von f nach der lexikographischen Ordnung der Grade und können (da K ein Körper ist!) ohne Einschränkung annehmen, dass der Koeffizient des lexikographisch kleinsten Monoms 1 ist. Also können wir f in der Form

$$f = 1 \cdot X_0^{k_0} \cdot \cdots \cdot X_n^{k_n} + X_0^{k_0} \cdot \cdots \cdot X_n^{1+k_n} \cdot g_n + \cdots + X_0^{1+k_0} \cdot g_0$$

mit Polynomen $g_j \in K[X_j, \ldots, X_n]$ schreiben. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0, \ldots, x_n) \\ &= x_0^{k_0} \cdot \cdots \cdot x_n^{k_n} \cdot \big(1 + x_n \cdot g_n(x_n)\big) + \cdots + x_0^{1+k_0} \cdot g_0(x_0, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Induktiv liefert dies $y_0, \ldots, y_n \in R$ mit

$$0 = x_0^{k_0} \cdot \Big(\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \big(x_n^{k_n} \cdot (1 + x_n \cdot y_n) + x_{n-1} \cdot y_{n-1}\big) \cdots + x_0 \cdot y_0 \Big).$$

Mit dem Dimensionskriterium erhalten wir somit $\dim R \leq n = \operatorname{trdeg}_K R$. □

Korollar 2.3.16 (Dimension von Polynomringen über Körpern)**.** *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\dim K[X_1, \ldots, X_n] = n.$$

Beweis. Die Schachtelung $(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n)$ zeigt, dass $\dim K[X_1, \ldots, X_n] \geq n$.

Nach Proposition 2.3.14 ist $\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \ldots, X_n] = n$; also liefert Korollar 2.3.15 die noch fehlende Abschätzung

$$\dim K[X_1, \ldots, X_n] \leq \operatorname{trdeg}_K K[X_1, \ldots, X_n] = n. \qquad \square$$

Aus der klassischen Geometrie sind wir gewöhnt, dass wir die Dimension als Maximum lokal berechneter Dimensionen bestimmen können (zum Beispiel bei Mannigfaltigkeiten). Eine ähnliche Aussage gilt auch für die Dimension von Ringen; zum Beispiel beruht auch der Beweis des Kriteriums von Coquand und Lombardi auf einer solchen Überlegung. Im nächsten Kapitel werden wir systematisch untersuchen, wie man Ringe „lokal“ studieren kann, und dies unter anderem auf die Dimension von Ringen anwenden.

3

Lokalisierung

Ein wichtiger Aspekt der Geometrie von Mannigfaltigkeiten ist, dass gewisse Fragen lokal untersucht werden können. Wir werden sehen, dass ähnliche Mechanismen auch bei der Untersuchung von Ringen und Moduln verwendet werden können. Die zentrale Konstruktion in diesem Kontext ist die sogenannte Lokalisierung. Als Vorbereitung werden wir zunächst kurz lokale Ringe untersuchen. Danach führen wir die Lokalisierungskonstruktion ein und studieren ihre Eigenschaften und Anwendungen.

Überblick über dieses Kapitel.

3.1	Lokale Ringe	86
3.2	Lokalisierung von Ringen und Moduln	89
3.3	Lokalisierung und das Primspektrum	97
3.4	Lokale Eigenschaften	104
3.5	Vervollständigung	112

Schlüsselbeispiel. Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ an Primidealen und an Potenzen von Primelementen

3.1 Lokale Ringe

Als Vorbereitung für lokale Betrachtungen in allgemeinen Ringen untersuchen wir sogenannte lokale Ringe.

- *algebraische Motivation für lokale Ringe:* Die Ringe mit der einfachsten Ideal- und Modultheorie sind Körper. Indem man die Bedingung, dass das Nullideal maximal ist, dazu abschwächt, dass der Ring nur genau ein maximales Ideal besitzt, gelangt man zu den lokalen Ringen.
- *geometrische Motivation für lokale Ringe:* Das Primspektrum eines Ringes enthält im allgemeinen viele abgeschlossene Punkte (nämlich für jedes maximale Ideal einen). Indem man sich auf Ringe einschränkt, deren Primspektrum nur genau einen abgeschlossenen Punkt enthält, gelangt man zu den lokalen Ringen.

Definition 3.1.1 (lokaler Ring)**.**

- Ein Ring ist *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal enthält.
- Ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal m, so ist der Körper $k(R) := R/m$ (Satz 2.1.6) der *Restklassenkörper von* R.

Beispiel 3.1.2 (lokale Ringe)**.**

- Körper sind lokale Ringe (mit dem Nullideal als einzigem maximalen Ideal); der Restklassenkörper ist dabei isomorph zum gegebenen Körper.
- Der Ring $\mathbb{Z}$ ist *nicht* lokal (zum Beispiel sind (2) und (3) zwei verschiedene maximale Ideale).
- Der Nullring ist *nicht* lokal, da er überhaupt kein maximales Ideal enthält.
- Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(4)$ ist ein lokaler Ring; das einzige maximale Ideal ist dabei von [2] erzeugt. Der Restklassenkörper ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$.
- Der Teilring
$$\left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}$$
von $\mathbb{Q}$ ist ein lokaler Ring; das maximale Ideal ist das von 2 erzeugte Ideal, der Restklassenkörper ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$. Man kann dies von Hand nachrechnen oder Proposition 3.1.3 verwenden; wir werden aber auch sehen, dass es sich dabei um eine Instanz eines allgemeinen Lokalisierungsphänomens handelt (Korollar 3.3.3).

Proposition 3.1.3 (Lokalitätskriterien). *Sei R ein Ring und sei $m \subset R$ ein Ideal mit $m \neq R$. Dann gilt:*

1. *Ist jedes Element aus $R \setminus m$ eine Einheit in R, so ist R ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal m).*
2. *Ist m ein maximales Ideal in R und ist für jedes $x \in m$ das Element $1+x$ eine Einheit in R, so ist R ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal m).*

Beweis. Zu 1. Man kann dies zum Beispiel mithilfe von Satz 2.1.8 zeigen (Übungsaufgabe).

Zu 2. Man kann dies mithilfe von Proposition 2.2.31 zeigen oder indem man das Problem auf den ersten Teil zurückführt (Übungsaufgabe). □

Beispiel 3.1.4 (Funktionskeime). Sei X ein topologischer Raum, sei $x \in X$ und sei R der Ring der Funktionskeime stetiger Funktionen um x. Es ist also

$$R = \bigcup_{U \in U(x)} C(U, \mathbb{R}) \,/\!\sim,$$

wobei $U(x)$ die Menge aller offenen Umgebungen um x in X ist und $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die durch

$$f \sim g \iff f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$$

für alle $f \in C(U, \mathbb{R})$, $g \in C(V, \mathbb{R})$ mit $U, V \in U(x)$ gegeben ist. Die Addition und Multiplikation sind auf R durch punktweise Addition bzw. Multiplikation von Repräsentanten (auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche) definiert.

Dann ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$m := \big\{ [f] \in R \;\big|\; f(x) = 0 \big\},$$

denn: Es ist m der Kern der Auswertungsabbildung bei x (und damit ein Ideal in R) und die Auswertungsabbildung bei x liefert einen Isomorphismus $R/m \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{R}$; da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, ist somit m ein maximales Ideal.

Ist $[f] \in R \setminus m$, so hat f als stetige Funktion bereits in einer offenen Umgebung von x keine Nullstellen und ist daher dort punktweise invertierbar. Also ist $[f]$ in R eine Einheit. Mit Proposition 3.1.3 folgt somit, dass R ein lokaler Ring ist. Dieses Beispiel erklärt, warum lokale Ringe lokale Ringe heißen.

Beispiel 3.1.5 (die p-adischen Zahlen). Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim und sei

$$\mathbb{Z}_{[\![p]\!]} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n)$$

der *Ring der p-adischen ganzen Zahlen*. Der inverse Limes wird dabei über das inverse System $(\pi_{n,k} \colon \mathbb{Z}/(p^n) \to \mathbb{Z}/(p^k))_{n,k \in \mathbb{N}_{>0}, k \leq n}$ der kanonischen Pro-

jektionen gebildet; zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\pi_n \colon \mathbb{Z}_{[\![p]\!]} \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$ die zugehörige Strukturabbildung des inversen Limes.

Dann ist $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\ker \pi_1$ (Übungsaufgabe).

Ist K ein Körper und sind V, W Vektorräume über K mit $V \otimes_K W \cong_K \{0\}$, so folgt $V \cong_K \{0\}$ oder $W \cong_K \{0\}$, denn $\dim_K V \otimes_K W = \dim_K V \cdot \dim_K W$. Analog gilt für Moduln über lokalen Ringen:

Satz 3.1.6 (Tensorprodukte über lokalen Ringen)**.** *Sei R ein lokaler Ring und seien M, N endlich erzeugte Moduln über R mit $M \otimes_R N \cong_R \{0\}$. Dann ist $M \cong_R \{0\}$ oder $N \cong_R \{0\}$.*

Für den Beweis verwenden wir als Hilfsmittel das Lemma von Nakayama (ein Klassiker der Kommutativen Algebra):

Definition 3.1.7. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul und sei $a \subset R$ ein Ideal. Dann definieren wir

$$a \cdot M := \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in a, x_1, \ldots, x_n \in M \right\} \subset M.$$

Bemerkung 3.1.8. Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul und sei $a \subset R$ ein Ideal. Dann ist $a \cdot M$ ein R-Untermodul von M (nachrechnen). Außerdem können wir diesen Untermodul wie folgt durch ein Tensorprodukt beschreiben (da a als Ideal in R insbesondere ein R-Modul ist): Unter dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} R \otimes_R M &\longrightarrow M \\ r \otimes x &\longmapsto r \cdot x \end{aligned}$$

korrespondiert $a \otimes_R M$ zu $a \cdot M$ (nachrechnen).

Lemma 3.1.9 (Lemma von Nakayama)**.** *Sei R ein Ring, sei M ein endlich erzeugter R-Modul und sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a \subset J(R)$. Dann gilt: Ist $M = a \cdot M$, so folgt $M \cong_{\mathbb{R}} \{0\}$.*

Beweis. Angenommen, $M \ncong_R \{0\}$. Sei $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset M$ ein minimales Erzeugendensystem des R-Moduls M; insbesondere ist $n > 0$. Wegen $M = a \cdot M$ gibt es $a_1, \ldots, a_n \in a$ mit

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot u_j.$$

Wegen $a \subset J(R)$ ist $1 - a_n$ eine Einheit in R (Proposition 2.2.31). Damit erhalten wir

$$u_n = \frac{1}{1 - a_n} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot u_j;$$

insbesondere ist auch $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ ein Erzeugendensystem von M, im Widerspruch zur Minimalität von $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Also ist $M \cong_R \{0\}$. □

Beweis von Satz 3.1.6. Sei $m \subset R$ das maximale Ideal des lokalen Rings R und sei $k := R/m$ der Restklassenkörper von R. Die Idee ist, mithilfe des Tensorprodukts $k \otimes_R \cdot$ einen Basiswechsel durchzuführen, so dass wir mit Moduln über k (d.h. mit k-Vektorräumen) arbeiten können.

Wegen $M \otimes_R N \cong_R \{0\}$ erhalten wir aus den Verträglichkeiten des Tensorprodukts (man beachte dabei, dass der Grundring R kommutativ ist ...):

$$\begin{aligned}(k \otimes_R M) \otimes_k (k \otimes_R N) &\cong_k \big((k \otimes_R M) \otimes_k k\big) \otimes_R N \\ &\cong_k (k \otimes_R M) \otimes_R N \\ &\cong_k k \otimes_R (M \otimes_R N) \\ &\cong_k k \otimes_R \{0\} \\ &\cong_k \{0\}.\end{aligned}$$

Da k ein Körper ist, ist somit $k \otimes_R M \cong_k \{0\}$ oder $k \otimes_R N \cong_k \{0\}$. Ohne Einschränkung sei $k \otimes_R M \cong_k \{0\}$. Dann folgt (da $\cdot \otimes_R M$ mit Quotienten verträglich ist; Korollar 1.5.13, Bemerkung 3.1.8)

$$\begin{aligned}\{0\} &\cong_R k \otimes_R M = (R/m) \otimes_R M \cong_R (R \otimes_R M)/(m \otimes_R M) \\ &\cong_R M/m \cdot M,\end{aligned}$$

und damit $m \cdot M = M$. Wegen $m = J(R)$ erhalten wir daraus mit dem Lemma von Nakayama (Lemma 3.1.9), dass $M \cong_R \{0\}$. □

Caveat 3.1.10. Die Aussage aus Satz 3.1.6 gilt aber im allgemeinen *nicht* über jedem Ring: Zum Beispiel ist (Proposition 1.5.16)

$$\mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(2,3) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}.$$

Sogar Tensorquadrate können trivial sein, obwohl der ursprüngliche Modul *nicht* trivial ist: Es gilt zum Beispiel

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$$

(Übungsaufgabe), obwohl $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ncong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

3.2 Lokalisierung von Ringen und Moduln

Wir werden nun eine Konstruktion kennenlernen, die es erlaubt, Ringe (bzw. Probleme über Ringe und Moduln) in lokale Ringe (bzw. Probleme über lokale Ringe und Moduln über lokalen Ringen) zu zerlegen. Die Lokalisierungskonstruktion ist eine Verallgemeinerung der Konstruktion des Quotientenkörpers und beruht auf „Brüchen“ mit eingeschränkten Nennern.

3.2.1 Lokalisierung von Ringen

Wir beginnen mit der Lokalisierung von Ringen. Dabei gibt man sich eine Menge „zulässiger Nenner“ vor.

Definition 3.2.1 (multiplikativ abgeschlossen)**.** Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $S \subset R$ ist *multiplikativ abgeschlossen*, wenn $1 \in S$ ist und

$$\forall_{x,y \in S} \quad x \cdot y \in S.$$

Beispiel 3.2.2 (multiplikativ abgeschlossene Teilmengen von Ringen)**.** Sei R ein Ring.

- Ist $a \subset R$ ein Ideal, so ist $R \setminus a$ genau dann multiplikativ abgeschlossen, wenn a ein Primideal ist.
- Ist $x \in R$, so ist die Menge $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ multiplikativ abgeschlossen.

Proposition 3.2.3 (Lokalisierung)**.** *Sei R ein Ring und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Wir betrachten die Relation*

$$\sim_S := \left\{ \big((r,s),(r',s')\big) \;\middle|\; r,r' \in R,\ s,s' \in S,\ \exists_{t \in S} \quad t \cdot r \cdot s' = t \cdot r' \cdot s \right\}$$

auf $R \times S$.

1. *Dann ist die Relation $\sim_S$ eine Äquivalenzrelation auf $R \times S$. Ist $(r,s) \in R \times S$, so schreiben wir auch $\frac{r}{s}$ für die von (r,s) repräsentierte Äquivalenzklasse.*
2. *Der Quotient $S^{-1}R := (R \times S)/\sim_S$ ist bezüglich der Multiplikation*

$$\begin{aligned} \cdot \colon S^{-1}R \times S^{-1}R &\longrightarrow S^{-1}R \\ \left(\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'}\right) &\longmapsto \frac{r \cdot r'}{s \cdot s'} \end{aligned}$$

und der Addition

$$\begin{aligned} + \colon S^{-1}R \times S^{-1}R &\longrightarrow S^{-1}R \\ \left(\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'}\right) &\longmapsto \frac{r \cdot s' + r' \cdot s}{s \cdot s'} \end{aligned}$$

ein Ring, die Lokalisierung von R an S*.*

Caveat 3.2.4. Die Äquivalenzrelation $\sim_S$ modelliert das Rechnen mit Brüchen. Da die Grundringe im allgemeinen *nicht* nullteilerfrei sind, muss man im Gegensatz zur Quotientenkörperkonstruktion das „Erweitern von Brüchen“ explizit durch die Einführung von „$\exists_{t \in S} \quad \ldots$“ berücksichtigen.

Beweis. Zu 1. Es ist klar, dass die Relation $\sim_S$ reflexiv und symmetrisch ist (nachrechnen). Bei der Transitivität sehen wir etwas genauer hin: Seien $(r,s),(r',s'),(r'',s'') \in R \times S$ mit $(r,s) \sim_S (r',s')$ und $(r',s') \sim_S (r'',s'')$. Also gibt es $t,t' \in S$ mit

$$t \cdot r \cdot s' = t \cdot r' \cdot s \quad \text{und} \quad t' \cdot r' \cdot s'' = t' \cdot r'' \cdot s'.$$

Da R kommutativ ist (!), erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} t' \cdot s' \cdot t \cdot r \cdot s'' &= t' \cdot t \cdot r \cdot s' \cdot s'' \\ &= t' \cdot t \cdot r' \cdot s \cdot s'' = t \cdot s \cdot t' \cdot r' \cdot s'' \\ &= t \cdot s \cdot t' \cdot r'' \cdot s' \\ &= t' \cdot s' \cdot t \cdot r'' \cdot s. \end{aligned}$$

Da S multiplikativ abgeschlossen ist, ist auch $t' \cdot s \cdot t \in S$, und es folgt $(r,s) \sim_S (r'',s'')$. Also ist $\sim_S$ tatsächlich transitiv.

Zu 2. Dies folgt mit den gewohnten Bruchrechentechniken. Wir zeigen stellvertretend, dass die Addition im ersten Argument wohldefiniert ist: Als erstes bemerken wir, dass der neue Nenner wieder in S liegt, da S multiplikativ abgeschlossen ist. Seien $r,r',r'' \in R$, $s,s',s'' \in S$ mit $r/s = r'/s'$. Also gibt es ein $t \in S$ mit $t \cdot r \cdot s' = t \cdot r' \cdot s$. Dann ist

$$\frac{r \cdot s'' + s \cdot r''}{s \cdot s''} = \frac{r' \cdot s'' + s' \cdot r''}{s' \cdot s''},$$

denn

$$\begin{aligned} t \cdot (r \cdot s'' + s \cdot r'') \cdot s' \cdot s'' &= t \cdot r \cdot s' \cdot s'' \cdot s'' + t \cdot s \cdot r'' \cdot s' \cdot s'' \\ &= t \cdot r' \cdot s \cdot s'' \cdot s'' + t \cdot s \cdot r'' \cdot s' \cdot s'' \\ &= t \cdot (r' \cdot s'' + s' \cdot r'') \cdot s \cdot s''. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.2.5 (Quotientenkörper)**.** Sei R ein Integritätsring. Dann ist $S := R \setminus \{0\} \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und die zugehörige Lokalisierung $S^{-1}R$ ist der Quotientenkörper $Q(R)$ von R. Der kanonische Homomorphismus $R \longrightarrow S^{-1}(R)$ ist injektiv.

Allgemeiner gilt: Ist R ein Integritätsring und $S \subset R \setminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen, so ist

$$\begin{aligned} S^{-1}R &\longrightarrow Q(R) \\ \frac{r}{s} &\longmapsto \frac{r}{s} \end{aligned}$$

ein wohldefinierter, injektiver Ringhomomorphismus (nachrechnen). Man kann daher die Lokalisierung $S^{-1}R$ mit dem Bild dieses Homomorphismus in $Q(R)$ identifizieren.

Auf diese Weise kann man zum Beispiel Lokalisierungen von Polynomringen (übern Körpern) als Ringe von „rationalen Funktionen“ mit eingeschränkten Nennern auffassen.

Beispiel 3.2.6 (Lokalisierung an (Komplementen von) Primidealen)**.** Sei R ein Ring und sei $p \in \operatorname{Spec} R$. Dann ist $R \setminus p$ multiplikativ abgeschlossen und man schreibt auch kurz

$$R_p := (R \setminus p)^{-1} R.$$

Zum Beispiel ist

$$\mathbb{Z}_{(2)} \cong_{\mathsf{Ring}} \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b \right\}.$$

Beispiel 3.2.7 (Lokalisierung an Ringelementen)**.** Sei R ein Ring und sei $f \in R$. Dann ist $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ multiplikativ abgeschlossen und man schreibt auch kurz

$$R_f := (\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\})^{-1} R.$$

Zum Beispiel ist

$$\mathbb{Z}_2 \cong_{\mathsf{Ring}} \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Caveat 3.2.8 (Notations-Katastrophe)**.** Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim. Dann gibt es leider mehrere Objekte, die aus $\mathbb{Z}$ und p entstehen, mit ähnlicher bzw. sogar identischer Notation. In der Literatur muss daher sehr genau auf den Kontext geachtet werden, um zu entschlüsseln, was wirklich gemeint ist:

- $\mathbb{Z}/p$: die zyklische Gruppe, die als Quotient der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ modulo dem Normalteiler $p \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ konstruiert wird. Manchmal wird diese Gruppe auch (fahrlässigerweise!) mit $\mathbb{Z}_p$ bezeichnet.
- $\mathbb{Z}/(p)$: der Restklassenring, der als Quotient des Rings $\mathbb{Z}$ modulo dem Ideal $(p) \subset \mathbb{Z}$ konstruiert wird.
- $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$: der Ring der p-adischen ganzen Zahlen. Oft wird dieser Ring auch (mittelmäßig fahrlässig) mit $\mathbb{Z}_p$ bezeichnet.
- $\mathbb{Z}_p$: die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ an $\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\mathbb{Z}_{(p)}$: die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ an $\mathbb{Z} \setminus (p)$.

Caveat 3.2.9 (zu kleine Lokalisierung)**.** Ist R ein Ring und ist $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen, so ist der kanonische Ringhomomorphismus $S \longrightarrow S^{-1}R$ im allgemeinen *nicht* injektiv, denn: Sei $R := \mathbb{Z}/(4)$ und sei $f := [2] \in R$. Dann ist

$$R_f = \big(\{[1], [2], [0]\}\big)^{-1} \cdot R \cong_{\mathsf{Ring}} \{0\},$$

denn: Für alle $r \in R, s \in S$ ist r/s in R_f gleich Null (also $[0]/[1]$), da $[0] \in S$ und

$$[0] \cdot r \cdot [1] = [0] \cdot [0] \cdot [s].$$

Analog zur universellen Eigenschaft des Quotientenkörpers eines Integritätsrings (Bemerkung III.2.1.18) haben allgemeine Lokalisierungen die folgende universelle Eigenschaft:

Proposition 3.2.10 (universelle Eigenschaft der Lokalisierung)**.** *Sei R ein Ring, sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sei $i\colon R \longrightarrow S^{-1}R$ der kanonische Ringhomomorphismus (gegeben durch $r \mapsto r/1$). Dann gilt:*

1. *Für alle $s \in S$ ist $i(s)$ eine multiplikative Einheit in $S^{-1}R$.*
2. *Für jeden Ring T und jeden Ringhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow T$ mit der Eigenschaft $f(S) \subset T^\times$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\widetilde{f}\colon S^{-1}R \longrightarrow T$ mit $\widetilde{f} \circ i = f$.*

Beweis. Zu 1. Sei $s \in S$. Dann ist $1/s$ ein wohldefiniertes Element in $S^{-1}R$ und in $S^{-1}R$ gilt

$$\frac{1}{s} \cdot i(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} = \frac{1 \cdot s}{s \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Insbesondere ist $i(s)$ eine Einheit in $S^{-1}R$.

Zu 2. Sei T ein Ring, sei $f\colon R \longrightarrow T$ ein Ringhomomorphismus mit der Eigenschaft $f(S) \subset T^\times$.

- *Eindeutigkeit:* Sei $\widetilde{f}\colon S^{-1}R \longrightarrow T$ ein Ringhomomorphismus mit $\widetilde{f} \circ i = f$. Dann gilt für alle $r \in R, s \in S$ (nach den Überlegungen im ersten Teil)

  $$\widetilde{f}\Big(\frac{r}{s}\Big) = \widetilde{f}\big(i(r) \cdot i(s)^{-1}\big) = \widetilde{f} \circ i(r) \cdot \big(\widetilde{f} \circ i(s)\big)^{-1} = f(r) \cdot f(s)^{-1}.$$

  Also ist $\widetilde{f}$ bereits eindeutig bestimmt.

- *Existenz:* Sei (man beachte dabei, dass $f(s)$ für alle $s \in S$ invertierbar ist)

  $$\begin{aligned} \widetilde{f}\colon S^{-1}R &\longrightarrow T \\ \frac{r}{s} &\longmapsto f(r) \cdot f(s)^{-1}. \end{aligned}$$

  Dann ist $\widetilde{f}$ wohldefiniert, denn: Seien $r, r' \in R, s, s' \in S$ mit $r/s = r'/s'$ in $S^{-1}R$. Also gibt es ein $t \in S$ mit $t \cdot r \cdot s' = t \cdot r' \cdot s$. Somit folgt

  $$\begin{aligned} f(t) \cdot f(r) \cdot f(s)^{-1} &= f(t) \cdot f(r) \cdot f(s') \cdot f(s')^{-1} \cdot f(s)^{-1} \\ &= f(t \cdot r \cdot s') \cdot f(s')^{-1} \cdot f(s)^{-1} \\ &= f(t \cdot r' \cdot s) \cdot f(s')^{-1} \cdot f(s)^{-1} \\ &= f(t) \cdot f(r') \cdot f(s')^{-1}. \end{aligned}$$

  Wegen $t \in S$ ist $f(t)$ in T invertierbar. Also erhalten wir aus der obigen Gleichung auch

$$f(r) \cdot f(s)^{-1} = f(r') \cdot f(s')^{-1}.$$

Daher ist $\widetilde{f}$ wohldefiniert.

Nach Konstruktion ist $\widetilde{f} \circ \underline{i} = f$. Außerdem zeigen die Standard-Bruchrechentechniken, dass $\widetilde{f}$ ein Ringhomomorphismus ist (nachrechnen). □

Ausblick 3.2.11 (Ore-Lokalisierung)**.** Ist R ein ninoko Ring, so ist bei der Konstruktion von Lokalisierungen von R mehr Vorsicht nötig. Wie wir im Beweis von Proposition 3.2.3 gesehen haben, ist die Kommutativität zum Beispiel wesentlich beim Nachweis der Transitivität der betrachteten Äquivalenzrelation eingegangen. Im nicht-kommutativen Fall kann im allgemeinen nur dann eine Lokalisierung durchgeführt werden, wenn die Menge, an der lokalisiert wird, die sogenannte *Ore-Bedingung* erfüllt. Den entstehenden Ring bezeichnet man dann als *Ore-Lokalisierung*.

3.2.2 Lokalisierung von Moduln

Wir erweitern die Lokalisierung von Ringen nun zu Lokalisierungsfunktoren auf Moduln. Es gibt zwei dafür zwei naheliegende Wege:

- Man definiert den Lokalisierungsfunktor als Tensorproduktfunktor mit dem entsprechend lokalisierten Ring.
- Man definiert den Lokalisierungsfunktor durch eine konkrete Konstruktion via Brüche.

Wir werden den ersten Weg wählen und dann zeigen, dass er alternativ auch durch Brüche beschrieben werden kann.

Definition 3.2.12 (Lokalisierungsfunktor)**.** Sei R ein Ring und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann definieren wir den *Lokalisierungsfunktor* $L_S \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{S^{-1}R}\mathsf{Mod}$ *an* S durch

$$L_S := S^{-1}R \otimes_R \cdot \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{S^{-1}R}\mathsf{Mod}\,.$$

Proposition 3.2.13 (Lokalisierung von Moduln)**.** *Sei R ein Ring, sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sei M ein R-Modul. Wir betrachten die Relation*

$$\sim_S := \left\{ \big((x,s),(x',s')\big) \;\middle|\; x,x' \in M,\ s,s' \in S,\ \exists_{t \in S} \quad t \cdot s' \cdot x = t \cdot s \cdot x' \right\}$$

auf $M \times S$.

1. *Dann ist $\sim_S$ eine Äquivalenzrelation auf $M \times S$. Ist $(x,s) \in M \times S$, so schreiben wir auch $\frac{x}{s}$ für die von (x,s) repräsentierte Äquivalenzklasse.*

2. *Der Quotient* $S^{-1}M := (M \times S)/\sim_S$ *ist bezüglich der Skalarmultiplikation*

$$\begin{aligned} S^{-1}R \times S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}M \\ \left(\frac{r}{s}, \frac{x}{t}\right) &\longmapsto \frac{r \cdot x}{s \cdot t} \end{aligned}$$

und der Addition

$$\begin{aligned} S^{-1}M \times S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}M \\ \left(\frac{x}{s}, \frac{x'}{s'}\right) &\longmapsto \frac{s' \cdot x + s \cdot x'}{s \cdot s'} \end{aligned}$$

ein $S^{-1}R$*-Modul.*

3. *Es ist*

$$\begin{aligned} S^{-1}M &\longrightarrow L_S M \\ \frac{x}{s} &\longmapsto \frac{1}{s} \otimes x \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von $S^{-1}R$*-Moduln.*

Beweis. Zu 1./2. Dies kann mit denselben Argumenten wie im Beweis von Proposition 3.2.3 nachgewiesen werden.

Zu 3. Die Abbildung ist wohldefiniert, denn: Seien $x, x' \in M$, $s, s' \in S$ mit $x/s = x'/s'$. D.h. es existiert ein $t \in S$ mit

$$t \cdot s' \cdot x = t \cdot s \cdot x'.$$

In $L_S M = S^{-1}R \otimes_R M$ erhalten wir dann (wegen $t, s, s' \in S \subset R$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \otimes x &= \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{t \cdot s'} \cdot t \cdot s'\right) \otimes x \\ &= \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{s'}\right) \otimes t \cdot s' \cdot x \\ &= \left(\frac{1}{s'} \cdot \frac{1}{t \cdot s}\right) \otimes t \cdot s \cdot x' \\ &= \left(\frac{1}{s'} \cdot \frac{1}{t \cdot s} \cdot t \cdot s\right) \otimes x' \\ &= \frac{1}{s'} \otimes x'. \end{aligned}$$

Also ist die im dritten Teil angegebene Abbildung φ wohldefiniert.

Ähnliche Argumente zeigen, dass φ auch mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich ist (nachrechnen).

Mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts erkennt man leicht, dass

$$L_S M = S^{-1}R \otimes_R M \longrightarrow S^{-1}M$$
$$\frac{r}{s} \otimes x \longmapsto \frac{1}{s} \cdot (r \cdot x)$$

ein wohldefinierter Homomorphismus von R- bzw. $S^{-1}R$-Moduln ist. Außerdem ist diese Abbildung invers zur gegebenen Abbildung φ (nachrechnen). Also ist φ ein Isomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln. □

3.2.3 Exaktheit

Nach Konstruktion als Tensorproduktfunktor ist jeder Lokalisierungsfunktor mit Kolimiten (insbesondere mit Quotienten und direkten Summen) verträglich. Eine der zentralen Eigenschaften der Lokalisierungsfunktoren ist, dass sie zusätzlich exakt sind, also exakte Sequenzen in exakte Sequenzen überführen:

Satz 3.2.14 (Exaktheit von Lokalisierung). *Sei R ein Ring und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist der Funktor $L_S\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{S^{-1}R}\mathsf{Mod}$* exakt*, d.h.: Sind N, M, Q Moduln über R und sind $f\colon N \longrightarrow M$, $g\colon M \longrightarrow Q$ Homomorphismen von R-Moduln mit $\operatorname{im} f = \ker g$, so ist auch*

$$\operatorname{im} L_S f = \ker L_S g.$$

Beweis. Wegen $g \circ f = 0$ ist auch $L_S g \circ L_S f = L_S(g \circ f) = L_S 0 = 0$ die Nullabbildung; also ist $\operatorname{im} L_S f \subset \ker L_S g$.

Umgekehrt gilt auch $\ker L_S g \subset \operatorname{im} L_S f$, denn: Wir verwenden dafür die konkrete Beschreibung der lokalisierten Moduln durch Brüche aus Proposition 3.2.13. Sei $y/s \in \ker L_S g$ (mit $y \in M$ und $s \in S$). Dann ist (nach Konstruktion von $L_S g$ als $\mathrm{id}_{S^{-1}R} \otimes_R g$ bzw. der Übersetzung davon in die Bruchdarstellung)

$$0 = L_S g\Big(\frac{y}{s}\Big) = \frac{g(y)}{s}.$$

Somit gibt es ein $t \in S$ mit

$$0 = t \cdot s \cdot 0 = t \cdot 1 \cdot g(y) = g(t \cdot y)$$

Also ist $t \cdot y \in \ker g = \operatorname{im} f$, d.h. es gibt ein $x \in N$ mit $f(x) = t \cdot y$. Dann ist

$$L_S f\Big(\frac{x}{t \cdot s}\Big) = \frac{f(x)}{t \cdot s} = \frac{t \cdot y}{t \cdot s} = \frac{y}{s},$$

und damit $y/s \in \operatorname{im} L_S f$. □

Anmerkung zum Lernen. Da Tensorproduktfunktoren im allgemeinen *nicht* exakt sind (Caveat 1.5.15), mussten wir im Beweis eine spezielle Eigen-

schaft der Lokalisierungsfunktoren verwenden, nämlich die Darstellung durch Brüche.

Definition 3.2.15 (flach)**.** Sei R ein Ring. Ein R-Modul M ist *flach*, wenn der Funktor $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ exakt ist.

Beispiel 3.2.16 (flache Moduln)**.**

- Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2$ ist *nicht* flach (Caveat 1.5.15).
- Ist R ein Ring, so ist R als R-Modul flach.
- Da Tensorprodukte und exakte Sequenzen mit direkten Summen verträglich sind, folgt (nachrechnen): Direkte Summen von flachen Moduln sind flach.

  Insbesondere: Ist R ein Ring, so sind alle freien R-Moduln flach und der Polynomring $R[T]$ (der ja als R-Modul zu $\bigoplus_{\mathbb{N}} R$ isomorph ist) ist ein flacher R-Modul.
- Über Körpern sind alle Moduln flach (da alle Moduln über Körpern frei sind).

Korollar 3.2.17 (Lokalisierungen sind flach)**.** *Sei R ein Ring und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}R$ flach als R-Modul.*

Beweis. Nach Definition ist

$$S^{-1}R \otimes_R \cdot \; = L_S \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{S^{-1}R}\mathsf{Mod}\,.$$

Da der Funktor L_S nach Satz 3.2.14 exakt ist, ist der Modul $S^{-1}R$ somit flach. Genau genommen geht an dieser Stelle auch ein, dass Sequenzen in ${}_{S^{-1}R}\mathsf{Mod}$ genau dann exakt sind, wenn die (durch Einschränkung der Skalare auf R über den kanonischen Ringhomomorphismus $R \longrightarrow S^{-1}R$ gegebene) unterliegende Sequenz von R-Moduln exakt ist. □

Beispiel 3.2.18 (Quotientenkörper sind flach)**.** Ist R ein Integritätsring, so ist der Quotientenkörper $Q(R)$ also ein flacher R-Modul. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul. Diese Tatsache kann zum Beispiel verwendet werden, um zu zeigen, dass Tensorprodukte im allgemeinen *nicht* mit Produkten (oder gar allgemeinen inversen Limiten) verträglich sind (Caveat 1.5.20).

Caveat 3.2.19 (Flachheit vs. Körper)**.** Im allgemeinen sind Körper *keine* flachen $\mathbb{Z}$-Moduln. Zum Beispiel ist $\mathbb{F}_2$ *kein* flacher $\mathbb{Z}$-Modul (Beispiel 3.2.16).

3.3 Lokalisierung und das Primspektrum

Wir untersuchen im folgenden wie man das Primspektrum von Lokalisierungen durch das Primspektrum des ursprünglichen Rings ausdrücken kann

und welche Eigenschaften des Primspektrum des ursprünglichen Rings in den Lokalisierungen sichtbar sind. Zum Beispiel wird uns dies eine alternative Beschreibung der Dimension von Ringen liefern.

3.3.1 Das Primspektrum von Lokalisierungen

Zunächst überlegen wir uns, wie wir den Lokalisierungsfunktor für Moduln nutzen können, um Ideale in Lokalisierungen zu konstruieren: Sei R ein Ring und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Sei $a \subset R$ ein Ideal; da Lokalisierung an S exakt ist, können wir den $S^{-1}R$-Modul $S^{-1}a$ als $S^{-1}R$-Untermodul (d.h. Ideal) in $S^{-1}R$ auffassen. Expliziter (und etwas schlampig) ist also

$$S^{-1}a = \left\{ \frac{x}{s} \in S^{-1}R \;\middle|\; x \in a, s \in S \right\} \subset S^{-1}R.$$

Tatsächlich ist jedes Ideal in $S^{-1}R$ von dieser Form:

Lemma 3.3.1 (Ideale in Lokalisierungen)**.** *Sei R ein Ring, sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sei $i\colon R \longrightarrow S^{-1}R$ der kanonische Ringhomomorphismus. Dann gilt für jedes Ideal $a \subset S^{-1}R$:*

$$a = S^{-1}i^{-1}(a).$$

Beweis. Sei $a \subset S^{-1}R$ ein Ideal und sei $b := S^{-1}i^{-1}(a)$. Dann ist b ein Ideal in $S^{-1}R$. Wir zeigen, dass $a = b$ ist:

Es gilt $b \subset a$, denn: Sei $z \in b$; nach Konstruktion gibt es also $s \in S$ und $x \in i^{-1}(a)$ mit $z = x/s$. Wegen $x \in i^{-1}(a)$ ist $x/1 = i(x) \in a$, und damit (da a ein Ideal in $S^{-1}R$ ist)

$$z = \frac{x}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{x}{1} \in a.$$

Umgekehrt gilt auch $a \subset b$, denn: Sei $z \in a$; also gibt es $x \in R$ und $s \in S$ mit $z = x/s$. Dann ist auch

$$i(x) = \frac{x}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{x}{s} \in a,$$

und damit $x \in i^{-1}(a)$. Also ist $z = x/s \in S^{-1}i^{-1}(a)$. □

Proposition 3.3.2 (Primspektrum von Lokalisierungen)**.** *Sei R ein Ring und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist*

$$\begin{aligned} \{p \in \operatorname{Spec} R \mid p \cap S = \emptyset\} &\longrightarrow \operatorname{Spec} S^{-1}R \\ p &\longmapsto S^{-1}p \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Wir schreiben φ für die in der Proposition angegebene Abbildung.

Die Abbildung φ ist *wohldefiniert*, denn: Sei $p \subset R$ ein Primideal mit $p \cap S = \emptyset$. Dann ist auch $S^{-1}p \subset S^{-1}R$ prim, denn: Wir zeigen dazu, dass der Restklassenring $S^{-1}R/S^{-1}p$ ein Integritätsring ist. Der Lokalisieriungsfunktor L_S ist als Tensorproduktfunktor mit Quotienten verträglich; also ist

$$S^{-1}R/S^{-1}p \cong_{S^{-1}R} S^{-1}(R/p).$$

Diesen Isomorphismus können wir auch als Ringisomomorphismus

$$S^{-1}R/S^{-1}p \cong_{\mathsf{Ring}} \overline{S}^{-1}(R/p)$$

mit $\overline{S} := \{[s] \mid s \in S\} \subset R/p$ auffassen (nachrechnen). Da p ein Primideal in R ist, ist R/p ein Integritätsring; wegen $p \cap S = \emptyset$ ist dabei $0 \notin \overline{S}$. Also ist $\overline{S}^{-1}(R/p)$ zu einem Teilring des Integritätsrings $Q(R/p)$ isomorph (Beispiel 3.2.5), und damit selbst ein Integritätsring. Daher ist auch $S^{-1}R/S^{-1}p$ ein Integritätsring. Insbesondere ist $S^{-1}p$ ein Primideal in $S^{-1}R$.

Die Abbildung φ ist *injektiv*, denn: Sei $p \in \operatorname{Spec} R$ mit $p \cap S = \emptyset$. Dann gilt $i^{-1}S^{-1}p = p$, denn: Nach Konstruktion ist

$$\begin{aligned}
i^{-1}(S^{-1}p) &= \left\{ y \in R \;\middle|\; \exists_{x \in p} \quad \exists_{s \in S} \quad \frac{x}{s} = \frac{y}{1} \right\} \\
&= \left\{ y \in R \;\middle|\; \exists_{x \in p} \quad \exists_{s,t \in S} \quad t \cdot x = t \cdot s \cdot y \right\} \\
&= \left\{ y \in R \;\middle|\; \exists_{x \in p} \quad \exists_{s,t \in S} \quad t \cdot x = t \cdot s \cdot y \right. \\
&\qquad\qquad \left. \wedge\, (t \in p \vee s \in p \vee y \in p) \right\} \qquad \text{(da } p \text{ prim)} \\
&= \left\{ y \in R \;\middle|\; \exists_{x \in p} \quad \exists_{s,t \in S} \quad t \cdot x = t \cdot s \cdot y \right. \\
&\qquad\qquad \left. \wedge\, y \in p \right\} \qquad \text{(da } p \cap S = \emptyset) \\
&= p.
\end{aligned}$$

Also ist φ injektiv.

Die Abbildung φ ist *surjektiv*, denn: Sei $q \in \operatorname{Spec} S^{-1}R$ und $p := \operatorname{Spec}(i)(q)$. Dann ist $p \subset R$ ein Primideal und nach Lemma 3.3.1 ist

$$q = S^{-1}i^{-1}(q) = S^{-1} \operatorname{Spec}(i)(q) = S^{-1}p.$$

Außerdem ist $p \cap S = \emptyset$, denn: *Angenommen*, es gäbe ein $x \in p \cap S$. Dann ist $x/1 = i(x) \in q$, und damit

$$\frac{1}{1} = \frac{x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1} \in q.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass q ein Primideal in $S^{-1}R$ ist. Also ist $p \cap S = \emptyset$ und somit ist φ surjektiv. □

Korollar 3.3.3 (Lokalisierungen zu Primidealen sind lokal). *Sei R ein Ring, sei $p \in \operatorname{Spec} R$, sei $S := R \setminus p$ und sei $i\colon R \longrightarrow S^{-1}R = R_p$ der kanonische Ringhomomorphismus. Dann ist*

$$\begin{aligned}\{q \in \operatorname{Spec} R \mid q \subset p\} &\longrightarrow \operatorname{Spec} R_p\\ q &\longmapsto S^{-1}q\end{aligned}$$

eine Bijektion. Insbesondere ist R_p ein lokaler Ring und das maximale Ideal von R_p ist $S^{-1}p$.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Proposition 3.3.2. Man beachte dabei, dass diese Bijektion mit der Inklusion von Idealen verträglich ist. □

Anmerkung zum Lernen. Sei R ein Ring und $p \in \operatorname{Spec} R$. Welcher Teil von $\operatorname{Spec} R$ wir durch $\operatorname{Spec} R/p$ beschrieben? Welcher durch $\operatorname{Spec} R_p$?

Caveat 3.3.4. Im allgemeinen sind Lokalisierungen von Ringen *keine* lokalen Ringe: Ist R ein Ring, der nicht lokal ist, so ist $\{1\}^{-1}R \cong_{\mathsf{Ring}} R$ nicht lokal.

Beispiel 3.3.5 (nochmal Primideale in Polynomringen). Sei R ein Integritätsring. Dann ist $Q(R)[T] \cong_{\mathsf{Ring}} (R \setminus \{0\})^{-1}(R[T])$ (nachrechnen). Insbesondere folgt aus Proposition 3.3.2: Die Abbildung

$$\begin{aligned}\big\{q \in \operatorname{Spec} R[T] \;\big|\; q \cap R = (0)\big\} &\longrightarrow \operatorname{Spec} Q(R)[T]\\ q &\longmapsto \big\{x \cdot f \;\big|\; x \in Q(R), f \in q\big\} = (R \setminus \{0\})^{-1}q\end{aligned}$$

ist wohldefiniert und injektiv. Dies gibt einen konzeptionellen Beweis von Lemma 2.3.9.

Beispiel 3.3.6 (Fasern). Seien R, R' Ringe, sei $f\colon R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus und sei $p \in \operatorname{Spec} R$. Dann gibt es eine mit Inklusionen von Idealen verträgliche Bijektion (Übungsaufgabe)

$$(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p) \longleftrightarrow \operatorname{Spec} k(p) \otimes_R R';$$

dabei ist $k(p)$ der Restklassenkörper des lokalen Rings R_p und R' wird via f als R-Modul aufgefasst. Diese Beschreibung der Faser $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p)$ liefert einen konzeptionellen Beweis von Lemma 2.3.10.

Die Beschreibung des Primspektrums von Lokalisierungen (Proposition 3.3.2) erlaubt es inbesondere Integritätsringe mit vorgegebener Anzahl von Primidealen zu konstruieren:

Beispiel 3.3.7 (ein Integritätsring mit genau 2018 Primidealen). Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \ldots, p_m$ die ersten m Primzahlen in $\mathbb{N}$. Wir betrachten die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge

$$S := \bigcap_{j \in \{1,\ldots,m\}} \mathbb{Z} \setminus (p_j) = \{x \in \mathbb{Z} \mid \forall_{j \in \{1,\ldots,m\}} \quad p_j \nmid x\}$$

in $\mathbb{Z}$. Dann ist

$$\{q \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid q \cap S = \emptyset\} = \{(0), (p_1), \ldots, (p_m)\}.$$

Mit Proposition 3.3.2 folgt also, dass $\operatorname{Spec} S^{-1}\mathbb{Z} = \{S^{-1}(p_1), \ldots, S^{-1}(p_m)\}$ genau $m+1$ Elemente enthält. Außerdem ist $S^{-1}\mathbb{Z}$ als Teilring von $\mathbb{Q}$ ein Integritätsring. Für $m = 2017$ erhalten wir auf diese Weise insbesondere einen Integritätsring mit genau 2018 Primidealen.

3.3.2 Lokalisierungen und Dimension

Die Dimension von (nicht-zusammenhängenden) Mannigfaltigkeiten können wir bestimmen, indem wir für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit die Dimension der Mannigfaltigkeit an diesem Punkt bestimmen und dann das Supremum bilden. Analog erhalten wir für Ringe:

Satz 3.3.8 (Dimension, lokal)**.** *Sei R ein Ring. Dann ist*

$$\dim R = \sup\{\dim R_p \mid p \in \operatorname{Spec} R\} = \sup\{\dim R_m \mid m \in \operatorname{mSpec} R\}.$$

Beweis. Wir schreiben $M := \max\{\dim R_m \mid m \in \operatorname{mSpec} R\} \in \mathbb{N} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Es gilt $\dim R \geq \sup\{\dim R_p \mid p \in \operatorname{Spec} R\} \geq M$, denn: Sei $p \in \operatorname{Spec} R$ und $S := R \backslash p$. Dann ist $R_p = S^{-1}R$ (nach Konstruktion) und nach Korollar 3.3.3 ist

$$\begin{aligned} \{q \in \operatorname{Spec} R \mid q \subset p\} &\longrightarrow \operatorname{Spec} R_p \\ q &\longmapsto S^{-1}q \end{aligned}$$

bijektiv. Da diese Abbildung außerdem mit der Inklusion von Idealen verträglich ist, folgt $\dim R \geq \dim R_p$. Indem wir das Supremum über alle Prim- bzw. maximalen Ideale von R bilden, erhalten wir die gewünschten Ungleichungen.

Umgekehrt gilt auch $\dim R \leq M$, denn: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n$ eine Schachtelung in $\operatorname{Spec} R$; nach Satz 2.1.8 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass p_n ein maximales Ideal ist. Wir betrachten $S := R \backslash p_n$. Dann ist (nach Korollar 3.3.3)

$$S^{-1}p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq S^{-1}p_n$$

eine Schachtelung in $\operatorname{Spec} R_{p_n}$, und damit $M \geq \dim R_{p_n} \geq n$. Indem wir das Supremum über alle solche Schachtelungstiefen n bilden, erhalten wir die Abschätzung $M \geq \dim R$. □

Insbesondere können wir mit dieser Technik auch das Dimensionskriterium von Coquand und Lombardi (Satz 2.3.11) beweisen: Zur Vorbereitung führen wir die folgende Notation ein:

Definition 3.3.9 (Rand)**.** Sei R ein Ring und $x \in R$. Dann definieren wir den *Rand von x in R* als den Ring

$$\partial_R x := S_x^{-1} R,$$

wobei $S_x := \{x^n \cdot (1+x\cdot y) \mid n \in \mathbb{N}, y \in R\} \subset R$ (multiplikativ abgeschlossen!).

Ist $x \in R$ eine Einheit oder nilpotent, so ist $0 \in S_x$, und damit $\partial_R x$ der Nullring. Wie es sich für Ränder gehört, haben Ränder kleinere Dimension:

Satz 3.3.10 (Dimension via Ränder)**.** *Sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es ist* $\dim R \leq n$.
2. *Für alle $x \in R$ ist* $\dim \partial_R x \leq n-1$.

Beweis. Die Idee ist natürlich wieder, Proposition 3.3.2 geeignet anzuwenden. Dafür überlegen wir uns:

① Für alle $x \in R$ und alle $m \in \operatorname{mSpec} R$ gilt $m \cap S_x \neq \emptyset$, denn: Ist $x \in m$, so ist auch $x \in m \cap S_x$. Ist hingegen $x \notin m$, so ist x modulo m invertierbar (da R/m ein Körper ist), und damit $m \cap \{1 + x \cdot y \mid y \in R\} \neq \emptyset$. Insbesondere ist auch $m \cap S_x \neq \emptyset$.

② Sind $p, q \in \operatorname{Spec} R$ mit $p \subset q$ und $x \in q \setminus p$, so ist $p \cap S_x = \emptyset$, denn: *Angenommen*, es wäre $p \cap S_x \neq \emptyset$. Dann gäbe es $k \in \mathbb{N}$ und $y \in R$ mit

$$x^k \cdot (1 + x \cdot y) \in p.$$

Da p ein Primideal ist und $x \notin p$ ist, folgt $1 + x \cdot y \in p \subset q$. Wegen $x \in q$ ist aber auch $x \cdot y \in q$, und damit $1 = 1 + x \cdot y - x \cdot y \in q$, im Widerspruch dazu, dass q ein Primideal ist.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis:
Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Sei $x \in R$, sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq q_k$ eine Schachtelung in $\operatorname{Spec} \partial_R x$. Nach Proposition 3.3.2 gibt es dann eine Kette $p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_k$ in $\operatorname{Spec} R$ mit

$$S_x^{-1} p_j = q_j \quad \text{und} \quad p_j \cap S_x = \emptyset$$

für alle $j \in \{0, \ldots, k\}$. Sei p_{k+1} ein maximales Ideal in R mit $p_k \subset p_{k+1}$ (ein solches existiert nach Satz 2.1.8). Nach ① ist $p_{k+1} \cap S_x \neq \emptyset$; insbesondere ist $p_{k+1} \neq p_k$. Also ist $\dim R \geq k+1$; damit folgt

$$\dim R \geq \dim \partial_R x + 1.$$

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1. Sei umgekehrt $n \in \mathbb{N}$ und sei $p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n$ eine Schachtelung in $\operatorname{Spec} R$. Wir wählen nun $x \in p_n \setminus p_{n-1}$. Nach ② ist $p_{n-1} \cap S_x = \emptyset$, und damit

$$\forall_{j \in \{0,\ldots,n-1\}} \quad p_j \cap S_x = \emptyset.$$

Mit Proposition 3.3.2 erhalten wir die Schachtelung $S_x^{-1}p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq S_x^{-1}p_{n-1}$ in $\operatorname{Spec} \partial_R x$. Insbesondere ist $\dim \partial_R x \geq n-1$. □

Beweis von Satz 2.3.11. Nach Satz 3.3.10 genügt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Ring R die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen zu zeigen:

(A) Für alle $x \in R$ ist $\dim \partial_R x \leq n-1$.

(B) Für alle $x_0, \ldots, x_n \in R$ gibt es $k_0, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ und $y_0, \ldots, y_n \in R$ mit

$$x_0^{k_0} \cdot \Big(\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \big(x_n^{k_n} \cdot (1 + x_n \cdot y_n) + x_{n-1} \cdot y_{n-1} \big) \cdots + x_0 \cdot y_0 \Big) = 0.$$

Wir beweisen diese Äquivalenz per Induktion über n.

Induktionsanfang. Die Bedingung

$$\forall_{x \in R} \quad \dim \partial_R x \leq -1$$

ist äquivalent dazu, dass $\partial_R x$ für jedes $x \in R$ der Nullring ist.

Sei $x \in R$. Dann ist $\partial_R x$ genau dann der Nullring, wenn $0 \in S_x$ ist (nachrechnen). Nach Definition ist aber genau dann $0 \in S_x$, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $y \in R$ mit

$$x^k \cdot (1 + x \cdot y) = 0$$

gibt. Dies beweist den Satz im Fall $n = 0$.

Induktionsvoraussetzung. Sei nun $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und es gelte die Äquivalenz von (A) und (B) für alle Dimensionen kleiner als n.

Induktionsschritt. Dann gilt die Äquivalenz von (A) und (B) auch in Dimension n, denn: Sei R ein Ring. Ist $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen, so gilt nach Induktionsvoraussetzung (und Satz 3.3.10) genau dann $\dim S^{-1}R \leq n-1$, wenn (in $S^{-1}R$)

$$\forall_{x_0,\ldots,x_{n-1} \in S^{-1}R} \quad \exists_{k_0,\ldots,k_{n-1} \in \mathbb{N}} \quad \exists_{y_0,\ldots,y_{n-1} \in S^{-1}R}$$
$$x_0^{k_0} \cdot \Big(\cdots x_{n-2}^{k_{n-2}} \cdot \big(x_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot (1 + x_{n-1} \cdot y_{n-1}) + x_{n-2} \cdot y_{n-2} \big) \cdots + x_0 \cdot y_0 \Big) = 0$$

gilt. Durch „hochmultiplizieren der Nenner“ sehen wir, dass diese Bedingung zu

$$\forall_{x_0,\ldots,x_{n-1} \in R} \quad \exists_{s \in S} \quad \exists_{k_0,\ldots,k_{n-1} \in \mathbb{N}} \quad \exists_{y_0,\ldots,y_{n-1} \in R}$$
$$x_0^{k_0} \cdot \Big(\cdots x_{n-2}^{k_{n-2}} \cdot \big(x_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot (s + x_{n-1} \cdot y_{n-1}) + x_{n-2} \cdot y_{n-2} \big) \cdots + x_0 \cdot y_0 \Big) = 0$$

in R äquivalent ist (nachrechnen). Indem wir diese Bedingung auf die multiplikativ abgeschlossenen Mengen S_{x_n} (mit $x_n \in R$) anwenden, erhalten wir die Äquivalenz von (A) und (B) in Dimension n. □

3.4 Lokale Eigenschaften

Unser Ausgangspunkt für die Einführung der Lokalisierung war der Wunsch, Eigenschaften von Moduln lokal verstehen zu können. Bereits in Kapitel 3.3.2 haben wir gesehen, wie man die Berechnung der Dimension eines Rings in lokale Probleme zerlegen kann.

Beispiel 3.4.1 (Dimension ist lokal)**.** Die Dimension von Ringen ist im folgenden Sinne lokal: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann sind äquivalent (Satz 3.3.8):

- Es gilt $\dim R \leq n$.
- Für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ gilt $\dim R_p \leq n$.
- Für alle $m \in \operatorname{mSpec} R$ gilt $\dim R_m \leq n$.

Wir werden nun auf weitere Beispiele dieser Art eingehen.

„Definition" 3.4.2 (lokale Eigenschaft)**.** Eine „Eigenschaft" P von Moduln ist *lokal*, wenn folgendes gilt: Ist R ein Ring und M ein R-Modul, so sind äquivalent:

- Der R-Modul M hat die Eigenschaft P.
- Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ hat der R_p-Modul $M_p := R_p \otimes_R M$ die Eigenschaft P.

Ist $p \in \operatorname{Spec} R$, so ist R_p ein lokaler Ring (Korollar 3.3.3). Bei lokalen Eigenschaften von Moduln kann man sich somit auf Moduln über lokalen Ringen (und damit auf Ringe mit übersichtlicherer Modultheorie) zurückziehen.

Bemerkung 3.4.3 (Vektorbündel)**.** Sei $\pi\colon E \longrightarrow X$ ein Vektorbündel über einem kompakten Hausdorffraum X, d.h. π ist ein lokal triviales Bündel, wobei die Fasern reelle Vektorräume sind (z.B. das Tangentialbündel einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit). Was hat ein solches Vektorbündel mit Modultheorie zu tun? Dazu betrachten wir den Ring $R := C(X, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann bildet die Menge

$$M := \left\{ f \in C(X, E) \;\middle|\; \pi \circ f = \mathrm{id}_X \right\}$$

der stetigen Schnitte von π einen R-Modul bezüglich punktweiser Multiplikation. Die Untersuchung des Vektorbündels π hat dann mehrere Aspekte:

- den lokalen Aspekt (z.B. die Betrachtung von π auf „kleinen" Teilmengen von X)
- und den globalen Aspekt (z.B. die Frage, ob das Bündel π global trivial ist).

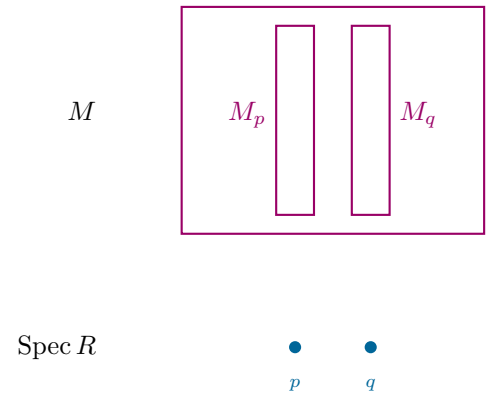


Abbildung 3.1.: lokale Betrachtung von Moduln, schematisch

Ist $x \in X$ und $m_x := \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ das zugehörige maximale Ideal, so kann man zeigen, dass die Lokalisierung R_{m_x} zum Ring der Funktionskeime um x (Beispiel 3.1.4) isomorph ist. Dementsprechend ist das Tensorprodukt $M_{m_x} \cong_R R_{m_x} \otimes_{R_{m_x}} M$ eine „lokale“ Variante von M.

Die Analogie mit Vektorbündeln liefert uns die folgende, naive, Anschauung für die lokale Betrachtung von Moduln: Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Als geometrisches Objekt zu R betrachten wir wie bisher das Primspektrum $\operatorname{Spec} R$ (und interpretieren R als „Funktionenring“ darauf). Dann ist M ein algebraischer Schatten eines „Bündels über $\operatorname{Spec} R$“ (Abbildung 3.1).

Proposition 3.4.4 („trivial“ ist lokal)**.** *Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gilt $M \cong_R \{0\}$.*
2. *Für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ ist $M_p \cong_{R_p} \{0\}$.*
3. *Für alle $m \in \operatorname{mSpec} R$ ist $M_m \cong_{R_m} \{0\}$.*

Beweis. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Ist $M \cong_R \{0\}$ und $p \in \operatorname{Spec} R$, so ist

$$M_p = R_p \otimes_R M \cong_{R_p} R_p \otimes_R \{0\} \cong_{R_p} \{0\}.$$

Zu 2. $\Longrightarrow$ 3. Dies ist klar, da $\operatorname{mSpec} R \subset \operatorname{Spec} R$.

Zu 3. $\Longrightarrow$ 1. Es gelte $M_m \cong_{R_m} \{0\}$ für alle $m \in \operatorname{mSpec} R$. Dann ist M bereits trivial, denn: Sei $x \in M$ und sei

$$a := \{y \in R \mid y \cdot x = 0\} = \ker(R \to M; y \mapsto y \cdot x) \subset R.$$

Dann ist $a \subset R$ ein Ideal (als Kern eines R-Modulhomomorphismus). Ist $a = R$, so ist $x = 0$. *Angenommen*, $a \neq R$. Dann gibt es ein maximales Ideal $m \in M$ mit $a \subset m$ (Satz 2.1.8).

Nach Voraussetzung ist $x/1 \in (R \setminus m)^{-1}M \cong_{R_m} M_m \cong_{R_m} \{0\}$ (Proposition 3.2.13). Also gibt es ein $y \in R \setminus m$ mit

$$y \cdot x = y \cdot 0 = 0.$$

Nach Konstruktion von a ist dann aber $y \in a$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $y \in R \setminus m \subset R \setminus a$. Also ist $a = R$, und damit $x = 0$. □

Proposition 3.4.5 („injektiv/surjektiv" ist lokal)**.** *Sei R ein Ring, seien M, N Moduln über R und sei $f\colon M \longrightarrow N$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modulhomomorphismus $f\colon M \longrightarrow N$ ist injektiv [surjektiv].*
2. *Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ ist $L_{R\setminus p}f\colon M_p \longrightarrow N_p$ injektiv [surjektiv].*
3. *Für jedes $m \in \operatorname{mSpec} R$ ist $L_{R\setminus m}f\colon M_m \longrightarrow N_m$ injektiv [surjektiv].*

Beweis. Wir zeigen dies, indem wir die Exaktheit des Lokalisierungsfunktors sowie die Lokalität des Verschwindens (Proposition 3.4.4) auf den Kern bzw. den Kokern von f anwenden:

Sei $K := \ker f$. Dann ist K ein R-Modul und die Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} K \xrightarrow{\text{Inkl. } i} M \xrightarrow{f} N$$

ist exakt. Ist $p \in \operatorname{Spec} R$, so ist der Funktor $L_{R\setminus p}f\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{R_p}\mathsf{Mod}$ exakt (Satz 3.2.14); somit ist auch

$$0 \xrightarrow{0} K_p \xrightarrow{L_{R\setminus p}i} M_p \xrightarrow{L_{R\setminus p}f} N_p$$

exakt, und damit

$$K_p \cong_{R\setminus p} \ker L_{R\setminus p}f.$$

Da Injektivität durch Trivialität des Kerns charakterisiert wird, erhalten wir mithilfe von Proposition 3.4.4 die Behauptung.

Für Surjektivität wenden wir dieselbe Argumentation auf $N/\operatorname{im} f$ an. □

Proposition 3.4.6 („flach" ist lokal)**.** *Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul M ist flach.*
2. *Für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ ist der R_p-Modul M_p flach.*
3. *Für alle $m \in \operatorname{mSpec} R$ ist der R_m-Modul M_m flach.*

Beweis. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Dies folgt aus den Eigenschaften des Tensorprodukts und der Flachheit des R-Moduls R_p (Satz 3.2.14) (Übungsaufgabe).

Zu 2. $\Longrightarrow$ 3. Dies ist klar, da $\operatorname{mSpec} R \subset \operatorname{Spec} R$.

Zu 3. $\Longrightarrow$ 1. Es sei M_m für jedes $m \in \operatorname{mSpec} R$ ein flacher R_m-Modul. Dann ist der R-Modul M bereits flach, denn:

Nach Lemma 3.4.7 genügt es zu zeigen, dass $M \otimes_R \cdot$ injektive R-Modulhomomorphismen auf injektive R-Modulhomomorphismen abbildet. Wir verwenden dafür die Lokalität von Injektivität: Sei also $f\colon A \longrightarrow B$ ein injektiver R-Modulhomomorphismus und $m \in \operatorname{mSpec} R$. Nach Proposition 3.4.5 ist dann $f_m\colon A_m \longrightarrow B_m$ injektiv. Da M_m ein flacher R_m-Modul ist, ist

$$M_m \otimes_{R_m} f_m\colon M_m \otimes_{R_m} A_m \longrightarrow M_m \otimes_{R_m} B_m$$

somit injektiv. Der kanonische Isomorphismus

$$\begin{aligned} M_m \otimes_{R_m} A_m &= (R_m \otimes_R M) \otimes_{R_m} (R_m \otimes_R A) \\ &\cong_{R_m} R_m \otimes_R (M \otimes_R A) = (M \otimes_R A)_m \end{aligned}$$

(und analog für $M_m \otimes_{R_m} B_m$) zeigt, dass daher

$$R_m \otimes_R (M \otimes_R f)\colon (M \otimes_R A)_m \longrightarrow (M \otimes_R B)_m$$

injektiv ist.

Mit Proposition 3.4.5 erhalten wir, dass auch $M \otimes_R f\colon M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B$ injektiv ist. □

Lemma 3.4.7 (Charakterisierungen von Flachheit)**.** *Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul M ist flach.*
2. *Der Funktor $M \otimes_R \cdot$ bildet kurze exakte Sequenzen in ${}_R\mathsf{Mod}$ auf kurze exakte Sequenzen in ${}_R\mathsf{Mod}$ ab.*
3. *Der Funktor $M \otimes_R \cdot$ bildet injektive R-Modulhomomorphismen auf injektive R-Modulhomomorphismen ab.*

Beweis. Die Implikationen 1. $\Longrightarrow$ 2. und 2. $\Longrightarrow$ 3. folgen direkt aus den Definitionen.

Zu 3. $\Longrightarrow$ 1. Wir nehmen an, dass $M \otimes_R \cdot$ Injektivität erhält. Dann ist M flach, denn: Sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

eine exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ (d.h. es gilt $\operatorname{im} f = \ker g$). Wir schreiben $\overline{f} := M \otimes_R f = \mathrm{id}_M \otimes_R f$ und $\overline{g} := M \otimes_R g = \mathrm{id}_M \otimes_R g$.

Dann ist $\operatorname{im} \overline{f} \subset \ker \overline{g}$, denn: Wegen $g \circ f = 0$ ist

$$\overline{g} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_M \otimes_R (g \circ f) = \mathrm{id}_M \otimes_R 0 = 0.$$

Umgekehrt gilt auch $\ker \overline{g} \subset \operatorname{im} \overline{f}$, denn: Sei $G\colon B/\operatorname{im} f = B/\ker g \longrightarrow C$ der von g induzierte R-Modulhomomorphismus. Dann ist G injektiv. Nach Voraussetzung ist dann auch

$$\begin{aligned} M \otimes_R G\colon M \otimes_R (B/\operatorname{im} f) &\longrightarrow M \otimes_R C \\ m \otimes [b] &\longmapsto m \otimes g(b) \end{aligned}$$

injektiv. Da $M \otimes_R \cdot$ mit Quotienten verträglich ist, ist daher auch

$$\begin{aligned} (M \otimes_R B)/(M \otimes_R \operatorname{im} f) &\longrightarrow M \otimes_R C \\ [m \otimes b] &\longmapsto m \otimes g(b) = \overline{g}(m \otimes b) \end{aligned}$$

injektiv. Also ist $\ker \overline{g} \subset M \otimes_R \operatorname{im} f$. Wegen der Rechtsexaktheit von $M \otimes_R \cdot$ ist dabei $M \otimes_R \operatorname{im} f = \operatorname{im}(M \otimes_R f) = \operatorname{im} \overline{f}$. □

Wir können nun auch umgekehrt fragen:

Frage 3.4.8. Welche Moduln sind lokal frei?

Caveat 3.4.9 („frei“ ist nicht lokal)**.** Im allgemeinen sind lokal freie Moduln *nicht* frei: Sei $R := \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ und sei $M := \mathbb{Z}/(2) \times \{0\}$; dann ist M ein R-Modul (als Ideal in R). Der R-Modul M ist *nicht* frei (da er genau zwei Elemente enthält und der Grundring R genau vier Elemente enthält). Aber M ist lokal frei, denn: Es ist

$$\operatorname{Spec} R = \big\{p_1 := \mathbb{Z}/(2) \times \{0\}, p_2 := \{0\} \times \mathbb{Z}/(2)\big\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} R_{p_2} &\longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \\ \frac{(x_1, x_2)}{s} &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Ringisomorphismus (nachrechnen) und analog $R_{p_1} \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(2)$. Also sind R_{p_1} und R_{p_2} Körper. Daher ist jeder R-Modul bereits lokal frei. Insbesondere ist auch M lokal frei.

Wir wollen außerdem noch ein wichtiges geometrisches Beispiel dieser Art verstehen, nämlich das Möbiusband. Als Vorbereitung überlegen wir uns:

Proposition 3.4.10. *Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Es gebe einen R-Modul $\overline{M}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$M \oplus \overline{M} \cong_R R^n.$$

Dann ist M im folgenden Sinne lokal frei: Für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ ist der Modul M_p ein freier R_p-Modul.

Der Beweis beruht auf der entsprechenden lokalen Aussage:

Lemma 3.4.11. *Sei R ein lokaler Ring und sei M ein R-Modul. Es gebe einen R-Modul $\overline{M}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$M \oplus \overline{M} \cong_R R^n.$$

Dann ist M bereits ein freier R-Modul.

Beweis. Sei $m \subset R$ das maximale Ideal von R und sei $k := R/m$ der Restklassenkörper von R. Wir verwenden wieder den Basiswechsel $k \otimes_R \cdot$.

- Es ist $d := \dim_k k \otimes_R M$ endlich, denn: Wegen $M \oplus \overline{M} \cong_R R^n$ und der Verträglichkeit von Tensorprodukten mit direkten Summen folgt

  $$(k \otimes_R M) \oplus (k \otimes_R \overline{M}) \cong_k k^n,$$

  und damit $\dim_k k \otimes_R M \in \{0, \ldots, n\}$. Außerdem ist der R-Modul M als direkter Summand (und damit auch Quotient) von R^n endlich erzeugt.

- Wir wählen nun $x_1, \ldots, x_d \in M$, für die die zugehörige Familie in $k \otimes_R M \cong_k M/m \cdot M$ eine k-Basis ist. Dies liefert einen R-Modulhomomorphismus

  $$f \colon R^d \longrightarrow M$$

  (indem wir die Standardbasis von R^d auf $x_1, \ldots, x_d$ abbilden), für den der induzierte Homomorphismus $k \otimes_R f \colon k^d \longrightarrow k \otimes_R M$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist. Es genügt nun zu zeigen, dass f ein Isomorphismus ist.

- Das Lemma von Nakayama liefert, dass f surjektiv ist (Übungsaufgabe).

- Außerdem ist f auch injektiv, denn: Wir zeigen dazu, dass $K := \ker f \subset R^d$ trivial ist.

  Da M ein direkter Summand des freien Moduls R^n ist und f surjektiv ist, besitzt f einen Spalt $\sigma \colon M \longrightarrow R^d$ mit $f \circ \sigma = \mathrm{id}_M$ (Übungsaufgabe). Damit besitzt die Inklusion $i \colon K \longrightarrow R^d$ einen Spalt $\varrho \colon R^d \longrightarrow K$ mit $\varrho \circ i = \mathrm{id}_K$ (Übungsaufgabe). Diesen Spalt ϱ kann man verwenden, um zu zeigen, dass K endlich erzeugt ist und dass die Sequenz

  $$0 \longrightarrow k \otimes_R K \xrightarrow{k \otimes_R i} k^d \xrightarrow{k \otimes_R f} k \otimes_R M \longrightarrow 0$$

  nicht nur rechtsexakt, sondern sogar exakt ist (Übungsaufgabe).

  Da $k \otimes_R f$ nach Konstruktion ein Isomorphismus ist, ist somit $k \otimes_R K \cong_k \{0\}$. Da K endlich erzeugt ist, folgt aus dem Lemma von Nakayama (oder Satz 3.1.6), dass $K \cong_R \{0\}$. Also ist f injektiv.

Insgesamt haben wir daher $R^d \cong_R M$ gezeigt. Also ist M ein freier R-Modul, wie behauptet. □

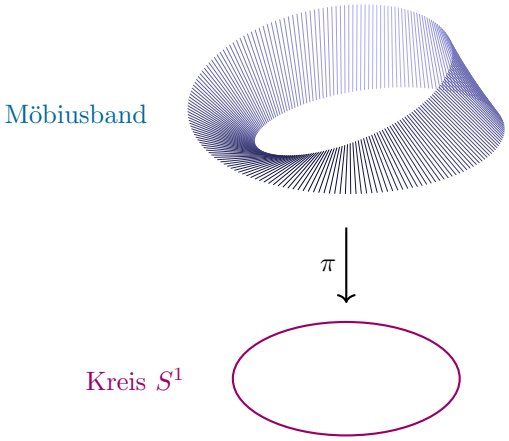


Abbildung 3.2.: Das Möbiusband als eindimensionales Vektorbündel über S^1

Beweis von Proposition 3.4.10. Sei $p \in \operatorname{Spec} R$; dann ist R_p ein lokaler Ring (Korollar 3.3.3). Da die Lokalisierung von R-Moduln an $R \setminus p$ mit direkten Summen verträglich ist (als Tensorproduktfunktor), folgt

$$M_p \oplus \overline{M}_p \cong_{R_p} {R_p}^n.$$

Mit Lemma 3.4.11 erhalten wir daraus, dass M_p ein freier R_p-Modul ist. Also ist M lokal frei. □

Zum Beispiel können wir auch mithilfe von Proposition 3.4.10 einsehen, dass der in Caveat 3.4.9 angegebene Modul lokal frei ist (da er ein direkter Summand des Grundrings ist; nachrechnen).

Beispiel 3.4.12 (Möbiusband)**.** Sei E „das“ (offene) Möbiusband (Abbildung 3.2); dann können wir die kanonische Projektion $\pi\colon E \longrightarrow S^1$ als eindimensionales reelles Vektorbündel über S^1 auffassen. Sei $R := C(S^1, \mathbb{R})$ und sei

$$M := \left\{ f \in C(S^1, E) \;\middle|\; \pi \circ f = \mathrm{id}_{S^1} \right\}$$

der R-Modul der stetigen Schnitte von π (Bemerkung 3.4.3).

Dann gilt $M \oplus M \cong_R R^2$ (nachrechnen; oder besser: nachbauen; Abbildung 3.3). Nach Proposition 3.4.10 ist M somit ein lokal freier R-Modul (dies passt auch dazu, dass Vektorbündel ja lokal trivial sind).

Aber der R-Modul M ist *nicht* frei, denn: Es ist $M \ncong_R \{0\}$ (man kann explizite nicht-triviale Schnitte angeben). Wäre M ein freier R-Modul, so müsste es aber insbesondere einen stetigen Schnitt von M geben, der *keine* Nullstellen besitzt (nachrechnen). Einen solchen Schnitt gibt es jedoch *nicht*, denn: *Angennommen,* es gäbe einen Schnitt $f\colon S^1 \longrightarrow E$ von π mit

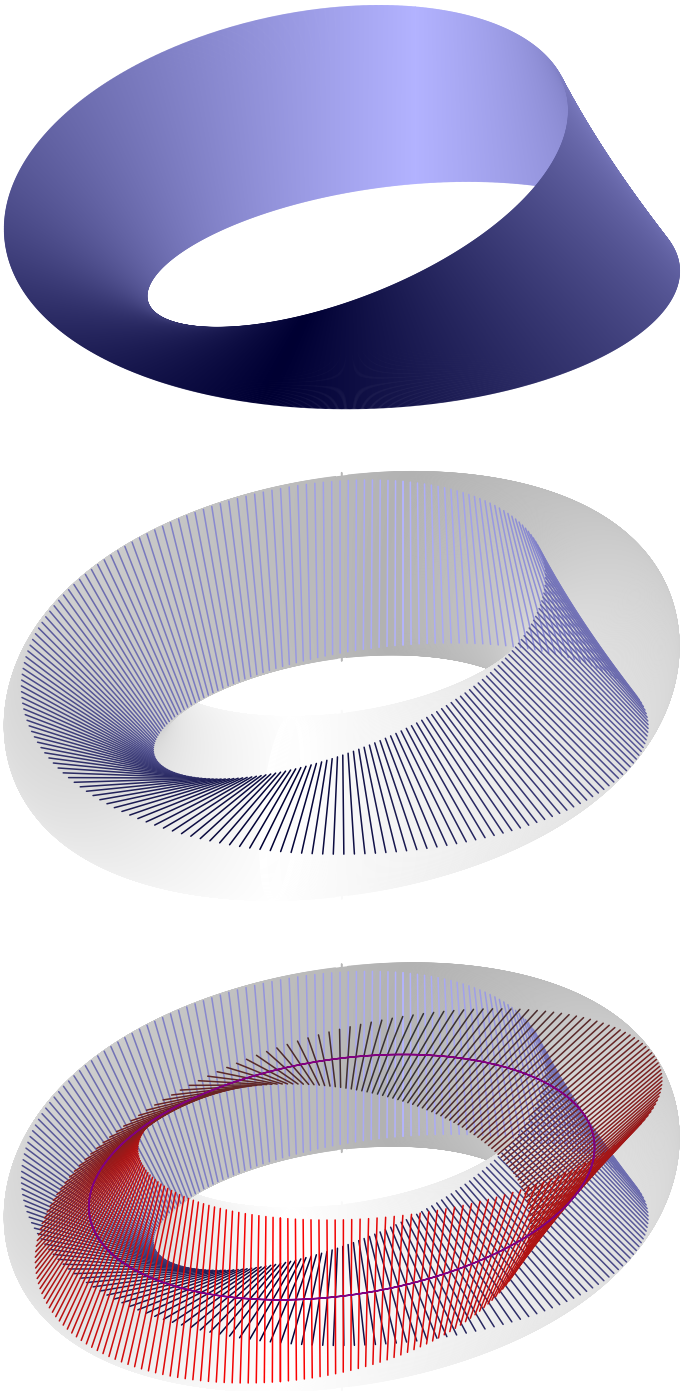


Abbildung 3.3.: Zwei Möbiusbänder addieren sich zu einem Torus (d.h. zu einem trivialen Bündel)

$$\forall_{x\in S^1} \quad f(x) \neq 0 \text{ im } \mathbb{R}\text{-Vektorraum } \pi^{-1}\big(\{x\}\big).$$

Da π ein eindimensionales Vektorbündel ist, liefert f dann bereits einen Vektorbündelisomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi\colon (\text{Proj.}\colon S^1\times\mathbb{R}\to S^1) &\longrightarrow (\pi\colon E\to S^1)\\ S^1\times\mathbb{R}\ni(x,t) &\longmapsto t\cdot f(x) \text{ im } \mathbb{R}\text{-Vektorraum } \pi^{-1}\big(\{x\}\big)\end{aligned}$$

(nachrechnen). Insbesondere induziert φ einen Homöomorphismus

$$(S^1\times\mathbb{R})\setminus\big(S^1\times\{0\}\big)\longrightarrow E\setminus\text{Nullschnitt}.$$

Die linke Seite hat zwei Zusammenhangskomponenten, die rechte jedoch nur eine (nachbauen!). Also kann es einen solchen Schnitt f nicht geben. Somit ist der Modul M *nicht* frei.

Moduln, die direkte Summanden in freien Moduln sind, spielen auch in der homologischen Algebra eine wichtige Rolle. Wir werden daher später nochmal auf diese Moduln zurückkommen (Kapitel 5).

3.5 Vervollständigung

Lokalisierungen sind ein algebraisches Werkzeug, um an lokale Information zu gelangen. Manchmal sind aber Lokalisierungen nicht lokal genug; der Grund dafür ist, dass es in der Zariski-Topologie nicht genug offene Mengen gibt (Beispiel 2.2.9). Manchmal ist es daher nützlich – wie in der Analysis – geeignete Potenzreihenentwicklungen bzw. Vervollständigungen zu betrachten:

Definition 3.5.1 (adische Vervollständigung)**.** Sei R ein Ring und $a\subset R$ ein Ideal.

- Wir definieren induktiv die Ideale (in R)

$$a^1 := a \quad\text{und}\quad \forall_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \quad a^{n+1} := a\cdot a^n \subset a^n.$$

- Die *a-adische Vervollständigung von* R ist der Ring

$$R_{[\![a]\!]} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_{>0}} R/a^n,$$

  wobei der inverse Limes in Ring über das inverse System $(R/a^n \to R/a^k)_{n,k\in\mathbb{N}_{>0},k\leq n}$ der kanonischen Projektionen gebildet wird. (In der Literatur wird statt $R_{[\![a]\!]}$ auch oft die Notation $\widehat{R}_a$ verwendet.)

- Die kanonischen Projektionen $(R\longrightarrow R/a^n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ induzieren einen kanonischen Ringhomomorphismus $R\longrightarrow R_{[\![a]\!]}$. Ist dieser Ringho-

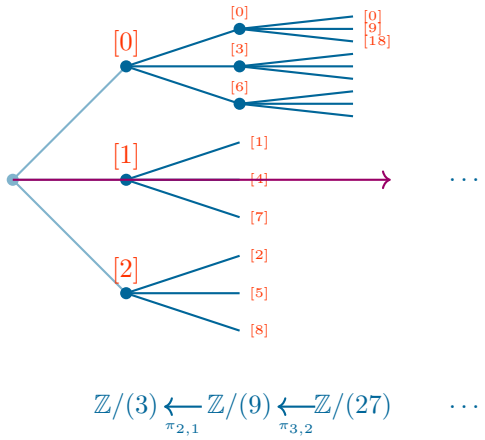


Abbildung 3.4.: Die 3-adischen Zahlen als Wege im 4-regulären Wurzelbaum; lila: der Weg zur 3-adischen Zahl $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$

momorphismus ein Isomorphismus, so bezeichnen wir R als *a-adisch vollständig*.

Die Vorstellung dabei ist, dass Elemente aus höheren Potenzen des Ideals a zu Termen höherer Ordnung korrespondieren und daher „klein“ sind. Mithilfe der adischen Topologie kann man die adische Vervollständigung als klassische Vervollständigung auffassen und über adische Konvergenz von Folgen sprechen (Anhang A.2).

Wie im Fall von Moduln können wir diese inversen Limiten konkreter als Mengen von Folgen kompatibler Elemente beschreiben.

Beispiel 3.5.2 (adische Vervollständigungen)**.**

- Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Die p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ (Beispiel 3.1.5) sind also nichts anderes als die p-adische Vervollständigung $\mathbb{Z}_{[\![(p)]\!]}$ von $\mathbb{Z}$ an (p).

  Ein konkretes Modell des inversen Limes $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ ist die Menge

  $$\left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n) \;\middle|\; \forall_{k,n\in\mathbb{N}} \quad k \leq n \Longrightarrow \pi_{n,k}(x_n) = x_k \right\}$$

  der bezüglich der kanonischen Projektionen $\pi_{n,k} \colon \mathbb{Z}/(p^n) \to \mathbb{Z}/(p^k)$ mit $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ kompatiblen Folgen. Diese Folgen lassen sich auch als (unendliche) Wege, beginnend bei der Wurzel, im $(p+1)$-regulären Wurzelbaum (Abbildung 3.4) veranschaulichen.

Sei $i\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ der kanonische Ringhomomorphismus. Dann ist $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal von $i(p)$ erzeugt wird (Übungsaufgabe); der Restklassenkörper ist (nachrechnen)

$$\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}/(p) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(p).$$

Da i *nicht* surjektiv ist (der Ring $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ ist *nicht* abzählbar) ist $\mathbb{Z}$ *nicht* p-adisch vollständig.

Eine andere Interpretation dieses Baumes ist, dass man sich Elemente von $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ als Potenzreihen in den Potenzen von p mit Koeffizienten in $\{0, \ldots, p-1\}$ vorstellen kann.

- Ist R ein Ring, so ist der formale Potenzreihenring $R[\![T]\!]$ die (T)-adische Vervollständigung von $R[T]$ (Beispiel 1.4.11). Die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot T^n$ zeigt, dass $R[T]$ *nicht* (T)-adisch vollständig ist.

  Analog zu den p-adischen ganzen Zahlen kann man zeigen: Ist K ein Körper, so ist $K[\![T]\!]$ ein lokaler Ring; das maximale Ideal wird dabei von T erzeugt und der Restklassenkörper ist isomorph zu K.

Beispiel 3.5.3 (zwei algebraische Mengen, sehr lokal)**.** Wir betrachten die affinen algebraischen Mengen

$$\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X \cdot Y) \quad \text{und} \quad \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2)$$

in $\mathbb{C}^2$. In klassischer Geometrie/Topologie sind diese beiden Teilmengen von $\mathbb{C}^2$ lokal (d.h. in einer kleinen Umgebung) um $(0,0)$ gleichartig (Abbildung 3.5).

- Erste lokale Betrachtung: via Lokalisierungen. In den Lokalisierungen der Koordinatenringe $R := \mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X \cdot Y)] = \mathbb{C}[X,Y]/(X \cdot Y)$ (Beispiel 2.2.22) und $R' := \mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2)] = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$ (Übungsaufgabe) ist diese Ähnlichkeit *nicht* zu erkennen: Das maximale Ideal, das von $\{[X],[Y]\}$ erzeugt wird, entspricht jeweils dem Nullpunkt. Einerseits ist

  $$R_{([X],[Y])} = \big(\mathbb{C}[X,Y]/(X \cdot Y)\big)_{([X],[Y])};$$

  kein Integritätsring (zum Beispiel ist $[X]/1$ ein Nullteiler). Andererseits ist

  $$R'_{([X],[Y])} \cong_{\mathsf{Ring}} \big(\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)\big)_{([X],[Y])}$$

  als Lokalisierung eines Integritätsrings am Komplement eines Primideals ein Integritätsring (Beispiel 3.2.5). Also gilt

  $$R_{([X],[Y])} \ncong_{\mathsf{Ring}} R'_{([X],[Y])}.$$

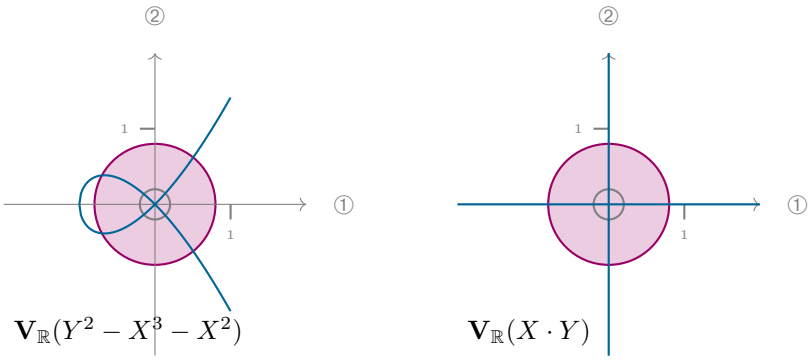


Abbildung 3.5.: Das reelle Bild der beiden affinen algebraischen Mengen $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X \cdot Y)$ und $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2)$ in der Nähe von $(0,0)$; in beiden Fällen erhält man zwei sich kreuzende „Linien“.

- Zweite lokale Betrachtung: via Vervollständigungen. Geht man jedoch stattdessen zu den $([X],[Y])$-adischen Vervollständigungen über, so erhält man: Einerseits ist (nachrechnen)

$$R_{[\![([X],[Y])]\!]} \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}[\![X,Y]\!]/(X \cdot Y).$$

  Andererseits ist (nachrechnen)

$$R'_{[\![([X],[Y])]\!]} \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}[\![X,Y]\!]/(Y^2 - X^3 - X^2).$$

  Im formalen Potenzreihenring $\mathbb{C}[\![X,Y]\!]$ gibt es Wurzeln aus dem Polynom $X^3 + X^2 = X^2 \cdot (1 + X)$, nämlich $\pm X \cdot w$, wobei (nachrechnen; Potenzreihenentwicklung von „$\sqrt{1+X}$“; oder Beispiel 3.5.6)

$$w := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2 \cdot n)!}{(1 - 2 \cdot n) \cdot (n!)^2 \cdot 4^n} \cdot X^{n+1}.$$

  Also ist

$$R'_{[\![([X],[Y])]\!]} \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}[\![X,Y]\!]/((Y + X \cdot w) \cdot (Y - X \cdot w)).$$

  In dieser Darstellung sind nun die Nullteiler bei beiden algebraischen Teilmengen klar zu erkennen. Da w eine Einheit in $\mathbb{C}[\![X]\!]$ ist (nachrechnen), kann man zeigen, dass die Ringe $R_{[\![([X],[Y])]\!]}$ und $R'_{[\![([X],[Y])]\!]}$ sogar isomorph sind.

Satz 3.5.4 (das Henselsche Lemma)**.** *Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal m, der m-adisch vollständig ist. Sei $k := R/m$ der Restklassenkörper*

von R und $\pi\colon R[T] \longrightarrow k[T]$ der Reduktionshomomorphismus modulo m. Sei $f \in R[T]$ ein normiertes Polynom und es gebe normierte Polynome $g, h \in k[T]$ mit $\mathrm{ggT}_{k[T]}(g,h) = (1)$ und

$$\pi(f) = g \cdot h.$$

Dann gibt es normierte Polynome $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in R[T]$ mit

$$f = \widetilde{g} \cdot \widetilde{h} \quad \textit{und} \quad \pi(\widetilde{g}) = g, \quad \pi(\widetilde{h}) = h.$$

Insbesondere ist $\deg \widetilde{g} = \deg g$ und $\deg \widetilde{h} = \deg h$.

Beweis. Da R nach Voraussetzung m-adisch vollständig ist, ist der kanonische Ringhomomorphismus $i\colon R \longrightarrow R_{[\![m]\!]}$ ein Isomorphismus. Aus i und kanonischen Bausteinen erhalten wir den Ringisomorphismus

$$\begin{aligned} R[T] &\cong_{\mathsf{Ring}} \big(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{>0}} R/m^n \big)[T] && \text{(induziert von } i\text{)} \\ &\cong_{\mathsf{Ring}} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{>0}} R[T]/m^n[T] \\ &\cong_{\mathsf{Ring}} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{>0}} R[T]/m[T]^n \\ &= R[T]_{[\![\widetilde{m}]\!]} \end{aligned}$$

(nachrechnen), wobei $\widetilde{m} := m[T]$. Die konkrete Beschreibung dieses inversen Limes durch kompatible Folgen liefert, dass es genügt, Folgen $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ normierter Polynome in $R[T]$ mit den folgenden Eigenschaften zu konstruieren:

- Es gilt $\pi(g_1) = g$ und $\pi(h_1) = h$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist $g_n \cdot h_n - f \in \widetilde{m}^n$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist $g_{n+1} - g_n \in \widetilde{m}^n$ und $h_{n+1} - h_n \in \widetilde{m}^n$.

Wir konstruieren solche Folgen induktiv:

Induktionsanfang. Wir wählen normierte Polynome $g_1, h_1 \in R[T]$, deren π-Reduktionen g bzw. h sind (diese existieren, da die kanonische Projektion $R \longrightarrow R/m = k$ surjektiv ist).

Induktionsschritt. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien g_n, h_n bereits konstruiert.

Wegen $\mathrm{ggT}_{k[T]}(g,h) = 1$ im Hauptidealring $k[T] \cong_{\mathsf{Ring}} R[T]/\widetilde{m}$ gibt es $a, b \in R[T]$ mit

$$a \cdot g_1 + b \cdot h_1 - 1 \in \widetilde{m}.$$

Wir betrachten nun

$$A_n := -a \cdot (g_n \cdot h_n - f) \in \widetilde{m}^n \quad \text{und} \quad B_n := -b \cdot (g_n \cdot h_n - f) \in \widetilde{m}^n$$

und setzen

$$g_{n+1} := g_n + B_n, \quad h_{n+1} := h_n + A_n \in R[T].$$

Nach Konstruktion ist dann $g_{n+1} - g_n, h_{n+1} - h_n \in \widetilde{m}^n$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} g_{n+1} \cdot h_{n+1} - f &= (g_n + B_n) \cdot (h_n + A_n) - f \\ &= g_n \cdot h_n - f + g_n \cdot A_n + B_n \cdot h_n + B_n \cdot A_n \\ &= g_n \cdot h_n - f - g_n \cdot a \cdot (g_n \cdot h_n - f) - h_n \cdot b \cdot (g_n \cdot h_n - f) + A_n \cdot B_n \\ &= (g_n \cdot h_n - f) \cdot (1 - a \cdot g_n - b \cdot h_n) + A_n \cdot B_n. \end{aligned}$$

Wegen $g_n \cdot h_n - f \in \widetilde{m}^n$ (nach Induktionsvoraussetzung) und $1 - a \cdot g_n - b \cdot h_n \in \widetilde{m}$ (nach Wahl von a und b) liegt der erste Summand in $\widetilde{m}^{n+1}$. Wegen $A_n, B_n \in \widetilde{m}^n$ und $n \geq 1$ ist auch $A_n \cdot B_n \in \widetilde{m}^{n+1}$. Also ist

$$g_{n+1} \cdot h_{n+1} - f \in \widetilde{m}^{n+1},$$

was die induktive Konstruktion abschließt. □

Beispiel 3.5.5 (eine Wurzel aus -1)**.** Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}_{[\![5]\!]}$ mit $x^2 = -1$, denn: Wir wenden das Henselsche Lemma (Satz 3.5.4) auf das Polynom

$$f := T^2 + 1 \in \mathbb{Z}_{[\![5]\!]}[T]$$

an. Der Ring $\mathbb{Z}_{[\![5]\!]}$ ist lokal und adisch vollständig bezüglich seinem maximalen Ideal (5) (nachrechnen). Die Reduktion von f im Polynomring $\mathbb{F}_5[T]$ des Restklassenkörpers $\mathbb{F}_5$ erfüllt

$$T^2 + [1] = \big(T - [2]\big) \cdot \big(T - [3]\big) \in \mathbb{F}_5[T].$$

Da $T - [2]$ und $T - [3]$ in $\mathbb{F}_5[T]$ teilerfremd sind, ist das Henselsche Lemma tatsächich anwendbar. Daher gibt es normierte, lineare, Polynome $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \mathbb{Z}_{[\![5]\!]}[T]$ mit (in $\mathbb{Z}_{[\![5]\!]}[T]$)

$$T^2 + 1 = f = \widetilde{g} \cdot \widetilde{h}.$$

Insbesondere hat g eine Nullstelle x in $\mathbb{Z}_{[\![5]\!]}$, und diese erfüllt nach Konstruktion $x^2 + 1 = 0$.

Alternativ kann man eine solche Wurzel aus -1 in $\mathbb{Z}_{[\![5]\!]}$ natürlich auch explizit mit dem Verfahren aus dem Beweis des Henselschen Lemmas konstruieren (Übungsaufgabe).

Beispiel 3.5.6 (implizite Funktionen)**.** Wir kommen nun auf „$\sqrt{X+1}$“ zurück: Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$, sei $f := Y^2 - (X+1) \in K[\![X]\!][Y]$. Aus Gradgründen gibt es *kein* Polynom $w \in K[X]$ mit $w(0) = 1$ und $f(X, w) = 0$. Es gibt jedoch eine formale Potenzreihe $w \in K[\![X]\!]$ mit

$$w(0) = 1 \quad \text{und} \quad f\big(X, w\big) = 0,$$

denn: Der Ring $K[\![X]\!]$ ist lokal und adisch vollständig bezüglich seinem maximalen Ideal (X) (nachrechnen). Die Reduktion von f im Polynomring $K[Y]$

des Restklassenkörpers K erfüllt

$$Y^2 - 1 = (Y - 1) \cdot (Y + 1).$$

Wegen $\operatorname{char} K \neq 2$ sind die Polynome $Y - 1$ und $Y + 1$ in $K[Y]$ teilerfremd. Nach dem Henselschen Lemma (Satz 3.5.4) gibt es normierte, lineare, Polynome $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in K[\![X]\!][Y]$ mit

$$Y^2 - (X + 1) = f = \widetilde{g} \cdot \widetilde{h},$$

deren Reduktion $Y - 1$ bzw. $Y + 1$ ist. Sei $w \in K[\![X]\!]$ die Nullstelle von $\widetilde{g}$. Dann ist $w(0) = 1$ und

$$f\big(X, w\big) = \widetilde{g}(w) \cdot \widetilde{h}(w) = 0 \cdot \widetilde{h}(w) = 0.$$

Literaturaufgabe. Lesen Sie das Kapitel über Vervollständigungen im Buch *Introduction to Commutative Algebra* von M.F. Atiyah und I.G. MacDonald [2, Kapitel 10], um einen systematischeren Überblick über Vervollständigungen zu erhalten.

4

Noethersche und Artinsche Ringe

Die Ring- und Modultheorie vereinfacht sich, wenn geeignete Endlichkeitsbedingungen erfüllt sind. Die zentrale solche Klasse von Ringen sind die noetherschen Ringe. Wir werden grundlegende Eigenschaften von noetherschen Ringen kennenlernen und mit diesen Techniken unter anderem den Hilbertschen Nullstellensatz beweisen. Außerdem werden wir auf verwandte Klassen von Ringen, wie z.B. artinsche Ringe, eingehen.

Überblick über dieses Kapitel.

4.1	Noethersche Ringe und Moduln	120
4.2	Der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes	126
4.3	Primärzerlegung	130
4.4	Artinsche Ringe	138
4.5	Dedekindringe	141

Schlüsselbeispiel. der Ring $\mathbb{Z}$, Polynomringe über Körpern (in endlich vielen Variablen)

4.1 Noethersche Ringe und Moduln

Noethersche Ringe sind Ringe, die Endlichkeitsbedingungen für Unterobjekte erfüllen.

4.1.1 Noethersche Ringe

Zwei offensichtliche Endlichkeitsbedingungen an Ringe sind:

- Die Kombinatorik der Menge der Ideale ist hinreichend endlich, d.h. aufsteigende Ketten von Idealen werden stationär.
- Jedes Ideal ist endlich erzeugt.

Wir werden die erste Bedingung als Definition noetherscher Ringe verwenden (da sie bei Teilbarkeitsbetrachtungen etc. eine wichtige Rolle spielt) und dann zeigen, dass sie zur zweiten äquivalent ist.

Definition 4.1.1 (noetherscher Ring)**.** Ein Ring R ist *noethersch*, wenn folgendes gilt: Für jede (bezüglich Inklusion) aufsteigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Idealen in R gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad a_n = a_N.$$

Beispiel 4.1.2 (noethersche Ringe)**.**

- Jeder Hauptidealring ist noethersch (Lemma II.2.4.22; Proposition 4.1.3).

  Zum Beispiel ist also $\mathbb{Z}$ noethersch und für jeden Körper K ist der Polynomring $K[T]$ noethersch.

- Der Polynomring $\mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2, \dots]$ in abzählbar unendlich vielen Variablen ist *nicht* noethersch, wie man an der Idealkette

  $$(X_0) \subsetneq (X_0, X_1) \subsetneq (X_0, X_1, X_2) \subsetneq \dots$$

  erkennen kann.

- Der Ring $C([0,1], \mathbb{R})$ ist *nicht* noethersch, denn: Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{1/k \mid k \in \mathbb{N}_{>n}\}$ und

  $$a_n := \big\{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \;\big|\; \forall_{x\in A_n} \quad f(x) = 0\big\}.$$

  Dann ist a_n ein Ideal und $a_n \subsetneq a_{n+1}$ (nachrechnen). Diese Idealkette wird also *nicht* stationär.

Proposition 4.1.3 (alternative Charakterisierung noetherscher Ringe)**.** *Sei R ein Ring. Dann sind äquivalent:*

1. *Der Ring R ist noethersch.*
2. *Jede nicht-leere Menge von Idealen in R besitzt ein bezüglich Inklusion maximales Element.*
3. *Jedes Ideal in R ist endlich erzeugt.*

Caveat 4.1.4 (maximale Elemente)**.** Ist $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, so ist ein Element $m \in M$ *maximal*, wenn

$$\forall_{x \in M} \quad m \leq x \Longrightarrow m = x$$

gilt. Es darf aber durchaus Elemente in M geben, die *nicht* mit m vergleichbar sind. Insbesondere ist im allgemeinen m *nicht* größer als alle Elemente aus M.

Lemma 4.1.5 (Kettenbedingungen in partiell geordneten Mengen)**.** *Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann sind äquivalent:*

1. *Jede nicht-leere Teilmenge von M enthält ein maximales Element.*
2. *Für jede aufsteigende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(M, \leq)$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_{\geq N}} \quad x_n = x_N.$$

Beweis von Lemma 4.1.5. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Es gelte die erste Aussage. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $(M, \leq)$, so ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine nicht-leere Teilmenge von M. Nach Voraussetzung besitzt diese ein maximales Element x_N mit $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt dann

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_{\geq N}} \quad x_n = x_N.$$

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1. Es gelte die erste Aussage *nicht*. Sei $N \subset M$ eine nicht-leere Teilmenge, die *kein* maximales Element enthält. Wegen $N \neq \emptyset$ gibt es ein $x_1 \in N$. Dieses ist nicht maximal. Also gibt es ein $x_2 \in N$ mit $x_1 < x_2$. Da N kein maximales Element enthält, ist auch x_2 *nicht* maximal, d.h. .... Induktiv erhält man so eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad x_n < x_{n+1}.$$

Also ist die zweite Aussage *nicht* erfüllt. □

Beweis von Proposition 4.1.3. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Dies folgt aus der entsprechenden allgemeinen Tatsache für partiell geordnete Mengen (Lemma 4.1.5); die Menge aller Ideale in R bildet bezüglich Inklusion eine partiell geordnete Menge.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 3. Es gelte die zweite Aussage. Sei $a \subset R$ ein Ideal. Wir betrachten die Menge M aller endlich erzeugten Ideale $b \subset R$ mit $b \subset a$. Wegen $0 \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung enthält M also ein maximales Element b.

Dann ist $a = b$ (und damit inbesondere auch a endlich erzeugt), denn: Nach Konstruktion ist $b \subset a$. *Angenommen*, es wäre $b \neq a$. Sei $x \in a \setminus b$. Dann ist $(b \cup \{x\})$ ein endlich erzeugtes Ideal, das in a enthalten ist, und echt größer als b ist, im Widerspruch zur Maximalität von b. Also ist $a = b$.

Zu 3. $\Longrightarrow$ 1. Es gelte die dritte Aussage. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Idealen von R. Dann ist auch $a := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ein Ideal (nachrechnen). Nach Voraussetzung ist a endlich erzeugt, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $S \subset a$ mit $a = (S)$. Wegen $a = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$S \subset a_N.$$

Damit erhalten wir aber für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$, dass

$$(S) \subset a_N \subset a_n \subset a = (S)$$

bzw. $a_n = a_N$. Also ist R noethersch. □

Anmerkung zum Lernen. Welche dieser Beweisschritte kennen Sie bereits aus der Linearen Algebra II bzw. Algebra?

Proposition 4.1.6 (Restklassenringe noetherscher Ringe)**.** *Sei R ein noetherscher Ring und $a \subset R$ ein Ideal. Dann ist auch R/a noethersch.*

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung über endliche Erzeugtheit von Idealen (Proposition 4.1.3). Sei $\pi\colon R \longrightarrow R/a$ die kanonische Projektion und sei $b \subset R/a$ ein Ideal. Dann ist $\widetilde{b} := \pi^{-1}(b)$ ein Ideal in R. Da R noethersch ist, ist $\widetilde{b}$ endlich erzeugt; sei $S \subset R$ eine endliche Menge mit $\widetilde{b} = (S)$. Dann wird

$$b = \pi(\widetilde{b})$$

von $\pi(S)$ erzeugt, ist also auch endlich erzeugt. Somit ist R/a noethersch. □

Proposition 4.1.7 (Lokalisierung noetherscher Ringe)**.** *Sei R ein noetherscher Ring und sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist auch die Lokalisierung $S^{-1}R$ noethersch.*

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass Ideale in $S^{-1}R$ nichts anderes als S-Lokalisierungen von Idealen in R sind (Lemma 3.3.1). □

Beispiel 4.1.8. Zum Beispiel sind also $\mathbb{Z}/(2018)$, $\mathbb{Z}_{2018}$, $\mathbb{Z}_{(2017)}$ noethersche Ringe.

4.1.2 Moduln über noetherschen Ringen

Um Ideale in noetherschen Ringen besser zu verstehen, ist es wie immer nützlich, auch Moduln besser zu verstehen.

Proposition 4.1.9 (endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen)**.** *Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist jeder R-Untermodul von M endlich erzeugt.*

Beweis. Wir gehen ähnlich wie im Fall von Hauptidealringen (Satz II.2.5.1) vor: Wir schreiben

$$d(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } n\text{-elementiges Erzeugendensystem von } M\}$$

und beweisen die Behauptung per Induktion über $d(M)$:

- *Induktionsanfang.* Ist $d(M) = 0$, so ist $M \cong_R \{0\}$. Der einzige Untermodul von M ist also M selbst (und damit insbesondere endlich erzeugt).

- *Induktionsvoraussetzung.* Sei nun $m := d(M) > 0$ und die Behauptung sei bereits für alle R-Moduln M' mit $d(M') < m$ gezeigt.

- *Induktionsschritt.* Wegen $m = d(M)$ gibt es einen surjektiven R-Modulhomomorphismus

  $$f\colon R^m \longrightarrow M.$$

  Sei $N \subset M$ ein R-Untermodul. Dann ist $\widetilde{N} := f^{-1}(N)$ ein R-Untermodul von R^m. Wegen $N = f(\widetilde{N})$ (nachrechnen) genügt es zu zeigen, dass $\widetilde{N}$ endlich erzeugt ist.

  Wir zerlegen das Problem nun: Dazu betrachten wir die Projektion

  $$\begin{aligned} \pi\colon R^m &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto x_m \end{aligned}$$

  auf die letzte Komponente und $K := \ker \pi = R^{m-1} \times \{0\} \subset R^m$. Mithilfe von π können wir $\widetilde{N}$ zerlegen:

  - Der Untermodul $\widetilde{K} := K \cap \widetilde{N} \subset K$ ist wegen $d(K) \leq m-1$ nach Induktionsvoraussetzung endlich erzeugt.
  - Auch $\widetilde{N}/\widetilde{K}$ ist endlich erzeugt, denn: Es gilt $\widetilde{N}/\widetilde{K} \cong_R \pi(\widetilde{N})$; da R noethersch ist, ist aber das Ideal $\pi(\widetilde{N})$ endlich erzeugt (als Ideal und als Modul).

Durch Kombination von endlichen Erzeugendensystemen von $\widetilde{K}$ und $\widetilde{N}/\widetilde{K}$ erhalten wir ein endliches Erzeugendensystem für $\widetilde{N}$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. □

4.1.3 Der Hilbertsche Basissatz

Neben der Bildung von Restklassenringen und Lokalisierungen ist die Klasse der noetherschen Ringe auch unter Bildung von Polynomringen abgeschlossen:

Satz 4.1.10 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch der Polynomring $R[T]$ noethersch.*

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung noetherscher Ringe über endliche Erzeugtheit von Idealen (Proposition 4.1.3). Sei $a \subset R[T]$ ein Ideal.

Wir betrachten die Menge $\widetilde{a} \subset R$ der Leitkoeffizienten von Polynomen in a; dann ist $\widetilde{a}$ ein Ideal in R (nachrechnen). Da R noethersch ist, ist $\widetilde{a}$ endlich erzeugt, etwa $\widetilde{a} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$. Nach Konstruktion gibt es somit für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $f_j \in a$, das eine Darstellung der Form

$$f_j = \lambda_j \cdot T^{d_j} + g_j$$

mit $d_j \in \mathbb{N}$, $g_j \in R[T]$ und $\deg g_j < d_j$ besitzt. Sei nun $d := \max\{d_1, \ldots, d_n\}$ und

$$b := \big(\{f_1, \ldots, f_n\}\big).$$

Wir zeigen als nächsten Schritt, dass

$$a = \big(a \cap \mathrm{Span}_R\{1, \ldots, T^{d-1}\}\big) + b$$

ist: Nach Konstruktion ist die rechte Seite in a enthalten. Warum gilt auch die umgekehrte Inklusion? Sei $f \in a$. Dann liegt der Leitkoeffizient von f in $\widetilde{a}$ und wir können durch induktives Abziehen von geeigneten Vielfachen von $f_1, \ldots, f_n$ erreichen, dass f in der Form

$$f = \widetilde{f} + g$$

mit $\widetilde{f} \in a$, $g \in b$ und $\deg \widetilde{f} < d$ dargestellt wird: Ist nämlich $\deg f \geq d$ und ist $\lambda \in a$ der Leitkoeffizient von f, so gibt es $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $\lambda = \sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \lambda_j$. Dann folgt für

$$g := \sum_{j=1}^{n} r_j \cdot T^{\deg f - d_j} \cdot f_j \in b \quad \text{und} \quad \widetilde{f} := f - g \in a,$$

dass $\deg \widetilde{f} < \deg f$. Induktiv kann man so den Grad kleiner als d erzwingen. Also ist

$$f \in \left(a \cap \mathrm{Span}_R\{1, \ldots, T^{d-1}\}\right) + b,$$

und damit $a = \left(a \cap \mathrm{Span}_R\{1, \ldots, T^{d-1}\}\right) + b$.

Da $\mathrm{Span}_R\{1, \ldots, T^{d-1}\}$ ein endlich erzeugter R-Modul ist und der Ring R noethersch ist, ist auch der Untermodul $a \cap \mathrm{Span}_r\{1, \ldots, T^{d-1}\}$ endlich erzeugt. Außerdem ist b endlich erzeugt (nach Konstruktion). Insgesamt folgt daraus, dass auch a endlich erzeugt ist. □

Bemerkung 4.1.11 (Hilbertscher Basissatz für Potenzreihenringe)**.** Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch $R[\![T]\!]$ noethersch (Übungsaufgabe). Statt der Leitkoeffizienten von Polynomen betrachtet man beim Beweis die Koeffizienten der *niedrigsten* Terme und verschiebt dann induktiv alle Sorgen ins Unendliche.

Die Beweistechnik mithilfe von Leitkoeffizienten spielt in der algorithmischen Kommutativen Algebra eine wichtige Rolle und hängt zum Beispiel mit Gröbner-Basen zusammen, die der zentrale Baustein der algorithmischen Behandlung sind (Anhang A.3).

Korollar 4.1.12. *Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so ist $K[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch.*

Beweis. Dies folgt induktiv aus der Hilbertschen Basissatz (Satz 4.1.10). □

Korollar 4.1.13 (Endlichkeitseigenschaften affiner algebraischer Mengen)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V \subset K^n$ eine affine algebraische Teilmenge. Dann gibt es eine* endliche *Teilmenge $F \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ mit*

$$V = \mathbf{V}_K(F).$$

Außerdem ist der Koordinatenring $\mathbf{K}_K[V]$ noethersch.

Beweis. Da $K[X_1, \ldots, X_n]$ ein noetherscher Ring ist (Korollar 4.1.12), ist das Verschwindungsideal $\mathbf{I}_K(V) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ endlich erzeugt; sei etwa $F \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein solches endliches Erzeugendensystem. Wegen $V = \mathbf{V}_K(\mathbf{I}_K(V)) = \mathbf{V}_K(F)$ (dieser Teil des Hilbertschen Nullstellensatzes 2.2.21 gilt für jeden Körper; nachrechnen) folgt somit die erste Behauptung.

Als Restklassenring von $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist auch $\mathbf{K}_K[V]$ noethersch (Proposition 4.1.6). □

Korollar 4.1.14. *Jeder endlich erzeugte Ring ist noethersch.*

Beweis. Sei R ein endlich erzeugter Ring, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow R$. Insbesondere ist R zu einem Restklassenring von $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ isomorph.

Induktiv folgt aus dem Hilbertschen Basissatz (Satz 4.1.10), dass der iterierte Polynomring $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch ist (da $\mathbb{Z}$ noethersch ist). Da Restklassenringe von noetherschen Ringen noethersch sind (Proposition 4.1.6), ist somit auch R noethersch. □

Beispiel 4.1.15. Die Ringe $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}[i \cdot \sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ sind endlich erzeugt, und damit noethersch. Beispiele dieser Art treten häufig in der Algebraischen Zahlentheorie auf.

4.2 Der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes

Wir verwenden den Kontext der noetherschen Ringe, um einen Beweis des (schwachen) Hilbertschen Nullstellensatzes (Satz 2.2.4) zu geben. Die grundlegende Idee dazu ist, Körper der Form $K[X_1, \ldots, X_n]/m$, wobei K ein (algebraisch abgeschlossener) Körper und m ein maximales Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist, besser zu verstehen. Dies betten wir in die Welt der endlich erzeugten Algebren ein.

Definition 4.2.1 (Algebra)**.** Sei R ein Ring.

- Eine *R-Algebra* ist ein Ring A zusammen mit einem Ringhomomorphismus $R \longrightarrow A$.
- Eine R-Algebra A ist *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Teilmenge $S \subset A$ gibt, so dass die (bezüglich Inklusion) kleinste R-Unteralgebra $R[S]$ von A, die S enthält, bereits $R[S] = A$ erfüllt.

Wir definieren R-Algebrenhomomorphismen und R-Unteralgebren in der offensichtlichen Art und Weise.

Als ersten Schritt zeigen wir die folgende Vererbungseigenschaft für endliche Erzeugtheit von Algebren (Abbildung 4.2):

Proposition 4.2.2 (Artin-Tate-Lemma)**.** *Sei R ein noetherscher Ring, sei A eine endlich erzeugte R-Algebra und sei $B \subset A$ eine R-Unteralgebra mit der Eigenschaft, dass A ein endlich erzeugter B-Modul ist. Dann ist auch B eine endlich erzeugte R-Algebra.*

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von A als B-Modul und sei $\{y_1, \ldots, y_d\}$ ein Erzeugendensystem von A als R-Algebra. Dann existieren $(b_r(i))_{i \in \{1,\ldots,d\}, r \in \{1,\ldots,n\}}$ und $(b_r(j,k))_{j,k,r \in \{1,\ldots,n\}}$ in B mit

$$\forall_{i \in \{1,\ldots,d\}} \quad y_i = \sum_{r=1}^{n} b_r(i) \cdot x_r$$

$$\forall_{j,k \in \{1,\ldots,n\}} \quad x_j \cdot x_k = \sum_{r=1}^{n} b_r(j,k) \cdot x_r.$$

Sei $\widetilde{R}$ die R-Unteralgebra von B, die von den darin auftretenden Koeffizienten $(b_r(i))_{i \in \{1,\ldots,d\}, r \in \{1,\ldots,n\}}$ und $(b_r(j,k))_{j,k,r \in \{1,\ldots,n\}}$ erzeugt wird.

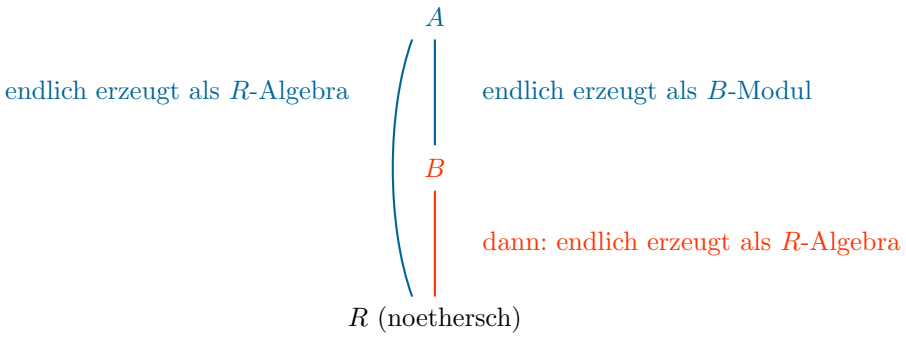


Abbildung 4.1.: Das Artin-Tate-Lemma, schematisch

Induktiv können wir somit jedes endliche Produkt der $y_1, \ldots, y_d$ als $\widetilde{R}$-Linearkombination von $x_1, \ldots, x_n$ schreiben. In anderen Worten: Es ist A ein endlich erzeugter $\widetilde{R}$-Modul, erzeugt von $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Da R noethersch ist, ist auch $\widetilde{R}$ noethersch (dies folgt wie Korollar 4.1.14 induktiv aus dem Hilbertschen Basissatz (Satz 4.1.10) und Proposition 4.1.6).

Da B ein $\widetilde{R}$-Untermodul von A ist und $\widetilde{R}$ noethersch ist, ist auch B ein endlich erzeugter $\widetilde{R}$-Modul (Proposition 4.1.9). Da $\widetilde{R}$ eine endlich erzeugte R-Algebra ist, folgt daraus, dass B auch eine endlich erzeugte R-Algebra ist. □

Ausblick 4.2.3 (endlich erzeugte Gruppen)**.** Das Artin-Tate-Lemma für Algebren besitzt das folgende Analogon in der Gruppentheorie: Ist A eine endlich erzeugte Gruppe und B eine Untergruppe, so ist B im allgemeinen *nicht* endlich erzeugt. Falls B jedoch endlichen Index in A besitzt, so ist B endlich erzeugt. Man kann dies entweder von Hand algebraisch beweisen oder auf Tricks aus der Geometrischen Gruppentheorie zurückgreifen [8, Corollary 4.2.14, Corollary 5.4.5].

Um den nächsten Beweisschritt formulieren zu können, benötigen wir ein paar grundlegende Hilfsmittel aus der Theorie der Körpererweiterungen [9, Kapitel 3]:

Bemerkung 4.2.4 (Hilfsmittel aus der Theorie der Körpererweiterungen)**.** Sei K ein Körper. Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung, d.h. L ist ein Körper mit $K \subset L$.

- Ist $S \subset L$, so bezeichnet man mit $K(S)$ den (bezüglich Inklusion) kleinsten Teilkörper von L, der K und S enthält.
- Ein Element $x \in L$ ist *algebraisch über* K, wenn die Familie (x) über K algebraisch abhängig ist, d.h., wenn es ein Polynom $f \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0$ gibt.

- Ist $x \in L$ *nicht* algebraisch über K, so induziert der Einsetzungshomomorphismus einen Isomorphismus $K(T) \cong_{\mathsf{Alg}_K} K(x)$ von K-Algebren.
- Ist $S \subset L$ endlich und sind alle Elemente aus S algebraisch über K, so ist $\dim_K K(S)$ endlich.
- Ist K algebraisch abgeschlossen und ist $L \mid K$ eine Körpererweiterung mit $\dim_K L < \infty$, so ist $L = K$.

Proposition 4.2.5 (Zariski-Lemma; Mini-Noether-Normalisierung)**.** *Sei K ein Körper und sei A eine endlich erzeugte K-Algebra, die sogar ein Körper ist. Dann ist A eine endliche Körpererweiterung von K, d.h.* $\dim_K A < \infty$.

Beweis. Da A ein Körper ist, ist der Ringhomomorphismus $K \longrightarrow A$ aus der Algebrenstruktur von A injektiv (Proposition III.3.1.6). Wir können somit $K \subset A$ als Körpererweiterung auffassen. Sei $S := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$ ein endliches Erzeugendensystem von A als K-Algebra. Nach Bemerkung 4.2.4 genügt es zu zeigen, dass jedes Element aus S algebraisch über K ist.

Angenommen, es gäbe ein Element in S, das *nicht* algebraisch über K ist. Durch Umsortieren können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $(x_1, \ldots, x_r)$ eine maximale über K algebraisch unabhängige Familie in S ist; nach Annahme ist dabei $r \geq 1$. Wir betrachten nun

$$B := K(x_1, \ldots, x_r) \subset A,$$

den von $x_1, \ldots, x_r$ erzeugten Teilkörper von A. Nach Konstruktion ist jedes der Elemente $x_{r+1}, \ldots, x_n$ algebraisch über B. Also ist $\dim_B A < \infty$ (Bemerkung 4.2.4).

Wir können somit das Artin-Tate-Lemma (Proposition 4.2.2) auf diese Situation anwenden, und erhalten, dass B eine endlich erzeugte K-Algebra ist. Dies lässt sich wie folgt zum Widerspruch führen (analog zur Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ keine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra ist):

Sei $\widetilde{K} := K(x_1, \ldots, x_{r-1})$. Dann ist $\widetilde{K}$ ein Körper und $B \cong_{\mathsf{Ring}} \widetilde{K}(x_r)$ ist eine endlich erzeugte $\widetilde{K}$-Algebra, etwa erzeugt von $\{y_1, \ldots, y_d\}$. Da x_r nicht algebraisch über $\widetilde{K}$ ist, ist $B \cong_{\mathsf{Alg}_{\widetilde{K}}} \widetilde{K}(T) = Q(\widetilde{K}[T])$ (wobei x_r der Variablen T entspricht; Bemerkung 4.2.4). Also gibt es für jedes $j \in \{1, \ldots, d\}$ Polynome $f_j, g_j \in \widetilde{K}[T]$ mit

$$y_j = \frac{f_j(x_r)}{g_j(x_r)} \quad \text{und} \quad g_j(x_r) \neq 0.$$

Wir zeigen, dass dies aber dazu führt, dass nicht genug Nenner aus $y_1, \ldots, y_d$ gebildet werden können: Sei dazu

$$h := g_1 \cdot \cdots \cdot g_d \cdot T + 1 \in \widetilde{K}[T].$$

Nach Konstruktion gilt $\mathrm{ggT}(h, g_j) = 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$. Aus Gradgründen ist außerdem $h \neq 0$, und damit $h(x_r) \neq 0$ (da x_r ja nicht algebraisch

über $\widetilde{K}$ ist); zudem ist h keine Einheit in $\widetilde{K}[T]$. Also ist

$$z := \frac{1}{h(x_r)} \in B;$$

der Isomorphismus $B \cong_{\mathsf{Alg}_K} \widetilde{K}(T)$ und das Erzeugendensystem $\{y_1, \ldots, y_d\}$ von B als $\widetilde{K}$-Algebra zeigen aber (durch Hochmultiplizieren der Nenner und da $\widetilde{K}[T]$ faktoriell ist), dass h dann einen nicht-trivialen gemeinsamen Teiler mit den Nennern $g_1, \ldots, g_d$ besitzen muss (im Widerspruch zur Konstruktion von h). Dieser Widerspruch zeigt, dass jedes Element aus S über K algebraisch ist. □

Korollar 4.2.6 (der Hilbertsche Nullstellensatz, algebraische Version)**.** *Sei K ein Körper, A eine endlich erzeugte K-Algebra und $m \subset A$ ein maximales Ideal.*

1. *Dann ist $\dim_K A/m$ endlich (die kanonische Abbildung $K \longrightarrow A/m$ liefert also eine endliche Körpererweiterung $A/m \mid K$).*
2. *Insbesondere: Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist die kanonische Abbildung $K \longrightarrow A/m$ ein Isomorphismus von K-Algebren.*

Beweis. Zu 1. Da m ein maximales Ideal ist, ist A/m ein Körper. Außerdem erbt A/m eine K-Algebrenstruktur von A. Wir erhalten die Behauptung daher durch Anwendung von Proposition 4.2.5 auf A/m.

Zu 2. Dies folgt direkt aus dem ersten Teil (Bemerkung 4.2.4). □

Beweis des schwachen Hilbertschen Nullstellensatzes (Satz 2.2.4). Sei (wie in der Voraussetzung des Satzes gefordert) $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal mit $a \neq K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\big\{x \in K^n \;\big|\; \forall_{f \in a} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = 0\big\} \neq \emptyset$, denn:

Wegen $a \neq K[X_1, \ldots, X_n]$ gibt es ein maximales Ideal $m \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $a \subset m$ (Satz 2.1.8). Die K-Algebra $A := K[X_1, \ldots, X_n]$ ist endlich erzeugt. Da K algebraisch abgeschlossen ist, ist nach dem algebraischen Hilbertschen Nullstellensatz (Korollar 4.2.6) die kanonische Abbildung $i\colon K \longrightarrow A/m$ ein K-Algebrenisomorphismus; sei $\varphi\colon A/m \longrightarrow K$ das Inverse von i. Wir betrachten nun den Punkt $x \in K^n$ mit

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} \quad x_j := \varphi\big([X_j]\big) \in K.$$

Nach Konstruktion ist also $i(x_j) = [X_j]$. Somit erhalten wir für alle $f \in m$:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi \circ i\big(f(x_1, \ldots, x_n)\big) \\ &= \varphi\big(f\big(i(x_1), \ldots, i(x_m)\big)\big) \\ &= \varphi\big(f\big([X_1], \ldots, [X_n]\big)\big) \\ &= \varphi\big([f]\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $a \subset m$ folgt daraus die Behauptung. □

4.3 Primärzerlegung

Noethersche Ringe sind im allgemeinen *nicht* faktoriell, d.h. Elemente von noetherschen Ringen besitzen im allgemeinen *keine* Primfaktorzerlegung (zum Beispiel ist $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ noethersch, aber nicht faktoriell). Man verfolgt daher die folgende Idee:

- Statt Zerlegungen von Elementen von Ringen als Produkte von Primpotenzen betrachtet man
- Zerlegungen von Idealen von Ringen als Durchschnitte von sogenannten primären Idealen.

Wir werden zeigen, dass in noetherschen Ringen jedes Ideal eine Primärzerlegung besitzt. Dies liefert zum Beispiel, dass affine algebraische Mengen in sogenannte irreduzible affine algebraische Mengen zerlegt werden können und dass Ideale in für die Zahlentheorie relevanten Ringen als Produkte von primären Idealen geschrieben werden können. Primärzerlegungen besitzen jedoch schlechtere Eindeutigkeitseigenschaften als die klassischen Primfaktorzerlegungen.

4.3.1 Primäre Ideale

Primäre Ideale sind eine Abschwächung von Primidealen:

Definition 4.3.1 (primäres Ideal, irreduzibles Ideal)**.** Sei R ein Ring. Ein Ideal $q \subset R$ ist *primär*, wenn $q \neq R$ ist und folgendes gilt:

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y \in q \Longrightarrow (x \in q \vee y \in \sqrt{q})$$

bzw.

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y \in q \Longrightarrow (x \in q \vee \exists_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \quad y^n \in q).$$

Beispiel 4.3.2 (primäre Ideale)**.**

- Jedes Primideal ist primär.
- Ist $p \in \mathbb{Z}$ prim und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist (p^n) ein primäres Ideal (nachrechnen).
- Das Ideal (6) in $\mathbb{Z}$ ist *nicht* primär, denn $2 \cdot 3 \in (6)$, aber $2 \notin (6)$ und $3 \notin (6) = \sqrt{(6)}$.

Bemerkung 4.3.3 (primäre Ideale via Restklassenringe)**.** Sei R ein Ring und $q \subset R$ ein Ideal. Dann sind äquivalent (nachrechnen):

1. Das Ideal q ist primär in R.

2. Es ist R/q nicht der Nullring und jeder Nullteiler in R/q ist nilpotent.

In Beispiel 4.3.2 haben wir gesehen, dass primäre Ideale als eine Art Verallgemeinerung von Potenzen von Primzahlen angesehen werden können. Zum Beispiel besitzt jedes primäre Ideal ein unterliegendes Primideal; dieses lässt sich durch idealtheoretisches Wurzelziehen, also durch Bildung des Radikals bestimmen:

Proposition 4.3.4 (Radikale primärer Ideale)**.** *Sei R ein Ring und sei $q \subset R$ primär. Dann ist*

$$p := \sqrt{q} \subset R$$

ein Primideal, nämlich das (bezüglich Inklusion) kleinste Primideal in R, das q enthält. Man bezeichnet dann q als p-primäres Ideal.

Beweis. Das Ideal $p = \sqrt{q}$ ist prim, denn: Seien $x, y \in R$ mit $x \cdot y \in p = \sqrt{q}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \in q.$$

Da q primär ist, gilt $x^n \in q$ oder $y^n \in \sqrt{q}$ (und damit auch $y \in \sqrt{q}$). Also ist $p = \sqrt{q}$ ein Primideal.

Offenbar ist $q \subset \sqrt{q} = p$. Ist $p' \in \operatorname{Spec} R$ mit $q \subset p'$, so ist $\sqrt{q} \subset p'$ (dies folgt direkt aus der Definition des Radikals und der Primeigenschaft); das zeigt die Minimalität von p. □

Beispiel 4.3.5 (primäre Ideale in $\mathbb{Z}$)**.** Mithilfe von Beispiel 4.3.2 und Proposition 4.3.4 kann man zeigen: Ideale in $\mathbb{Z}$ sind genau dann primär, wenn sie das Nullideal sind oder von der Form (p^n) mit einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sind.

Caveat 4.3.6. Die offensichtliche naive Verallgemeinerung (ein Ideal ist genau dann primär, wenn es eine Potenz eines Primideal ist), ist jedoch im allgemeinen falsch (Beispiel 4.3.7, Beispiel 4.3.8).

Beispiel 4.3.7 (ein primäres Ideal, das keine Primpotenz ist)**.** Sei K ein Körper. Dann ist das Ideal (X, Y^2) in $K[X, Y]$ primär, denn der zugehörige Restklassenring $K[X, Y]/(X, Y^2) \cong_{\mathsf{Ring}} K[Y]/(Y^2)$ erfüllt die Bedingung aus Bemerkung 4.3.3.

Aber das Ideal (X, Y^2) in $K[X, Y]$ ist *keine* Potenz eines Primideals, denn: *Angenommen*, es gäbe ein Primideal $p \subset K[X, Y]$ und ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $(X, Y^2) = p^n$. Nach Proposition 4.3.4 wäre dann

$$(X, Y) = \sqrt{(X, Y^2)} \subset p.$$

Da (X, Y) ein maximales Ideal in $K[X, Y]$ ist, folgt somit bereits $p = (X, Y)$. Andererseits ist

$$p^2 = (X^2, X \cdot Y, Y^2) \subsetneq (X, Y^2) \subsetneq (X, Y) = p,$$

im Widerspruch zur Existenz von n.

Beispiel 4.3.8 (eine Potenz eines Primideals, die nicht primär ist)**.** Sei K ein Körper und sei

$$R := K[X, Y, Z]/(X \cdot Y - Z^2).$$

Das Ideal $p := ([X], [Z]) \subset R$ ist prim (der Restklassenring R/p ist isomorph zu $K[Y]$). Aber das Ideal p^2 ist *nicht* primär in R, denn: Es gilt

$$[X] \cdot [Y] = [Z]^2 \in p^2,$$

aber $[X] \notin p^2$ (nachrechnen) und $[y] \notin \sqrt{p^2} = p$ (nachrechnen).

Die Umkehrung von Proposition 4.3.4 gilt also im allgemeinen *nicht*. Immerhin gilt aber die folgende Variante:

Proposition 4.3.9. *Sei R ein Ring und $a \subset R$ ein Ideal. Ist $\sqrt{a}$ ein maximales Ideal, so ist a primär.*

Beweis. Man kann dies zum Beispiel mithilfe der Eigenschaften des Restklassenrings R/a (Bemerkung 4.3.3) zeigen (Übungsaufgabe). □

4.3.2 Primärzerlegung in noetherschen Ringen

In Hauptidealringen können wir die Primfaktorzerlegung von Elementen alternativ auch als Durchschnitt der Hauptideale der zugehörigen Primpotenzen interpretieren. Wir definieren daher Primärzerlegungen von Idealen wie folgt:

Definition 4.3.10 (Primärzerlegung)**.** Sei R ein Ring und a ein Ideal.

- Das Ideal a besitzt eine *Primärzerlegung in R*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und primäre Ideale $q_1, \ldots, q_n \subset R$ gibt mit

$$a = \bigcap_{j=1}^{n} q_j.$$

- Eine Primärzerlegung $a = \bigcap_{j=1}^{n} q_j$ von a ist *minimal*, wenn folgendes gilt:
  - Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $a \neq \bigcap_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} q_k$.
  - Die Radikale $\sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_n}$ sind alle verschieden.

Die Minimalitätsbedingung für minimale Primärideale stellt sicher, dass keine überflüssigen primären Ideale in der Zerlegung enthalten sind und dass die primären Ideale zum selben Primideal geeignet zusammengefasst sind.

Beispiel 4.3.11 (Primärzerlegung)**.**

- In $\mathbb{Z}$ haben wir die folgenden Primärzerlegungen von (24):

$$(24) = (2^3) \cap (3) \quad \text{und} \quad (24) = (2^3) \cap (2^2) \cap (3).$$

  Primärzerlegungen sind im allgemeinen also *nicht* eindeutig. Die zweite Primärzerlegung ist jedoch *nicht* minimal.

- In $\mathbb{C}[X, Y]$ haben wir die minimale Primärzerlegung

$$(X \cdot Y) = (X) \cap (Y).$$

  Diese entspricht der Darstellung von $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X \cdot Y) \subset \mathbb{C}^2$ als Vereinigung der affinen algebraischen Teilmengen $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X), \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y) \subset \mathbb{C}^2$. (Und diese affinen algebraischen Teilmengen sind tatsächlich nicht weiter in affine algebraische Teilmengen zerlegbar).

- Sei K ein Körper und $a := (X^2, X \cdot Y) \subset K[X, Y]$. Dann sind

$$a = (X) \cap (X^2, X \cdot Y, Y) \quad \text{und} \quad a = (X) \cap (X^2, X \cdot Y, Y^2)$$

  minimale Primärzerlegungen von a in $K[X, Y]$ (Übungsaufgabe; zum Beispiel hilft Proposition 4.3.9). Auch minimale Primärzerlegungen sind im allgemeinen also *nicht* eindeutig.

- Der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ist noethersch, aber *nicht* faktoriell. Eine minimale Primärzerlegung von (6) in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ist

$$(6) = (2, 1 + i\sqrt{5})^2 \cap (3, 1 - i\sqrt{5}) \cap (3, 1 + i\sqrt{5}),$$

  denn: Die Ideale $(2, 1 + i\sqrt{5})$ und $(3, 1 \pm i\sqrt{5})$ sind sogar prim; dies kann man an den Restklassenringen ablesen: zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]/(2, 1 + i\sqrt{5}) &\cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}[T]/(T^2 + 5, 2, 1 + T) \\ &\cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(2)[T]/(T^2 + [5], T + [1]) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(2) \end{aligned}$$

  ein Integritätsring. Außerdem ist $(2, 1 + i\sqrt{5})^2$ primär (nachrechnen; z.B. über den Restklassenring).
  Es gilt $(6) \subset (2, 1 + i\sqrt{5})^2 \cap (3, 1 - i\sqrt{5}) \cap (3, 1 + i\sqrt{5})$, denn

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot (1 + i\sqrt{5}) - (1 + i\sqrt{5})^2 \\ 6 &= 3 \cdot 3 - (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5}). \end{aligned}$$

  Auch die umgekehrte Inklusion gilt; dies kann man zeigen, indem man nachrechnet, dass die entsprechenden Restklassenringe von $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ endlich und isomorph sind (und dies mit der bereits bewiesenen Inklusion kombiniert).

- Das Nullideal in $C([0,1],\mathbb{R})$ besitzt *keine* Primärzerlegung. Man kann dies zeigen, indem man sich überlegt, dass dieser Ring unendlich viele minimale Primideale enthält; andererseits kann man aus der Existenz einer Primärzerlegung des Nullideals aber folgern, dass es nur endlich viele minimale Primideale geben kann (Proposition 4.3.13).

Caveat 4.3.12. Die obigen Beispiele zeigen, dass Primärzerlegungen (im Gegensatz zu Primfaktorzerlegungen) im allgemeinen *keine* offensichtliche eingebaute Eindeutigkeit besitzen! Es gilt aber eine schwache Eindeutigkeit (Satz 4.3.20).

Proposition 4.3.13 (minimalen Primideale)**.** *Sei R ein Ring, in dem das Nullideal eine Primärzerlegung besitzt. Dann gibt es in R nur endlich viele (bezüglich Inklusion) minimale Primideale.*

Beweis. Sei $(0) = \bigcap_{j=1}^{n} q_j$ eine Primärzerlegung und sei $p \in \operatorname{Spec} R$ ein minimales Primideal. Dann ist $p \in \{\sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_n}\}$, denn:

Wegen $p \supset (0) = \bigcap_{j=1}^{n} q_j$ und der Primeigenschaft von p folgt

$$p = \sqrt{p} \supset \sqrt{\bigcap_{j=1}^{n} q_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \sqrt{q_j}.$$

Da p prim ist, folgt (analog zum Beweis von Proposition 2.2.5), dass es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $p \supset \sqrt{q_j}$ gibt. Da p ein bezüglich Inklusion minimales Primideal ist und $\sqrt{q_j}$ prim ist (Proposition 4.3.4), ist somit $p = \sqrt{q_j}$. □

Proposition 4.3.14 (von Primärzerlegungen zu minimalen Primärzerlegungen)**.** *Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal, das eine Primärzerlegung besitzt. Dann besitzt a auch eine minimale Primärzerlegung.*

Beweis. Durch Entfernen überflüssiger Ideale und Kombination von primären Idealen zum selben Primideal sehen wir, dass es genügt die folgende Aussage zu zeigen:

> Ist $p \in \operatorname{Spec} R$ und sind $q, q' \subset R$ zwei p-primäre Ideale, so ist auch $q \cap q'$ ein p-primäres Ideal.

Nach Voraussetzung ist

$$\sqrt{q \cap q'} = \sqrt{q} \cap \sqrt{q'} = p \cap p = p.$$

Außerdem ist $q \cap q'$ primär, denn: Seien $x, y \in R$ mit $x \cdot y \in q \cap q'$ und $x \notin q \cap q'$. Sei ohne Einschränkung $x \notin q$. Da q primär ist, ist $y \in \sqrt{q} = p = \sqrt{q \cap q'}$. Also ist $q \cap q'$ primär. □

Analog zum Beweis, dass Hauptidealringe faktoriell sind, erhalten wir:

Satz 4.3.15 (Primärzerlegung in noetherschen Ringen). *Sei R ein noetherscher Ring. Dann besitzt jedes Ideal in R eine minimale Primärzerlegung.*

Wir verwenden für den Beweis Zerlegungen in irreduzible Ideale.

Definition 4.3.16 (irreduzibles Ideal). Sei R ein Ring. Ein Ideal $a \subset R$ ist *irreduzibel*, wenn folgendes gilt: Sind $b, c \in R$ Ideale mit $a = b \cap c$, so folgt bereits $a = b$ oder $a = c$.

Lemma 4.3.17 (Zerlegung in irreduzible Ideale). *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist jedes Ideal in R der endliche Durchschnitt von irreduziblen Idealen.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein Ideal in R, das *nicht* als endlicher Durchschnitt von irreduziblen Idealen geschrieben werden kann. Dann ist die Menge M aller Ideale in R, die nicht als Durchschnitt von irreduziblen Idealen geschrieben werden können nicht-leer. Nach Proposition 4.1.3 gibt es also ein bezüglich Inklusion maximales Ideal a in M. Insbesondere ist a selbst nicht irreduzibel.

Es gibt somit Ideale $b, c \subset R$ mit $a = b \cap c$ und $b \neq a$ sowie $c \neq a$. Da a in M maximal ist und $a \subset b \cap c$ ist, folgt: Die Ideale b und c sind jeweils als Durchschnitte endlich vieler irreduzibler Ideale darstellbar. Durch Kombination erhalten wir so aber auch eine Darstellung von a als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale, im Widerspruch zu $a \in M$.

Also ist jedes Ideal in R der endliche Durchschnitt von irreduziblen Idealen. □

Lemma 4.3.18 (irreduzible Ideale sind primär). *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist jedes irreduzible Ideal in R primär.*

Beweis. Indem wir zum zugehörigen Restklassenring übergehen (und Proposition 4.1.6 verwenden), sehen wir, dass es genügt, die folgende Aussage zu zeigen: Ist in einem noetherschen Ring R das Nullideal irreduzibel, so ist es bereits primär.

Seien also $x, y \in R$ mit $x \cdot y = 0$. Wir betrachten dazu die aufsteigende Kette

$$N(y) \subset N(y^2) \subset \dots$$

von Idealen in R mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad N(y^n) := \{r \in R \mid y^n \cdot r = 0\}.$$

Da R noethersch ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $N(y^{N+1}) = N(y^N)$. Wir zeigen nun, dass

$$(x) \cap (y^N) = (0)$$

gilt: Sei $z \in (x) \cap (y^N)$. Dann gibt es ein $r \in R$ mit $z = r \cdot y^N$ und es folgt

$$\begin{aligned} r \cdot y^{N+1} &= z \cdot y && \text{(nach Wahl von } r) \\ &= 0 && \text{(da } z \in (x) \text{ und } x \cdot y = 0), \end{aligned}$$

und damit $r \in N(y^{N+1}) = N(y^N)$. Insbesondere ist $z = r \cdot y^N = 0$. Also ist $(x) \cap (y^N) = (0)$.

Da das Nullideal (0) als irreduzibel vorausgesetzt ist, folgt $(x) = 0$ oder $(y^N) = 0$, und damit $x \in (0)$ oder $y \in \sqrt{(0)}$. Daher ist das Nullideal (0) primär. □

Beweis von Satz 4.3.15. Nach Proposition 4.3.14 genügt es zu zeigen, dass jedes Ideal in R eine Primärzerlegung besitzt. Nach Lemma 4.3.17 ist jedes Ideal in R der Durchschnitt von irreduziblen Idealen. Da nach Lemma 4.3.18 jedes irreduzible Ideal bereits primär ist, liefert dies eine Primärzerlegun des gegebenen Ideals. □

Anmerkung zum Lernen. Vergleichen sie den Beweis von Satz 4.3.15 mit dem Beweis der Tatsache, dass Hauptidealringe faktoriell sind (Satz II.2.4.21).

Korollar 4.3.19. *Ist R ein noetherscher Ring (z.B. ein Körper oder $\mathbb{Z}$) und $n \in \mathbb{N}$, so besitzt jedes Ideal in $R[X_1, \ldots, X_n]$ eine Primärzerlegung.*

Beweis. Aus dem Hilbertschen Basissatz (Satz 4.1.10) folgt, dass der iterierte Polynomring $R[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch ist. Daher ist Satz 4.3.15 anwendbar. □

Außerdem gilt folgende Variante der Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen für Primärzerlegungen:

Satz 4.3.20 (schwache Eindeutigkeit von Primärzerlegungen)**.** *Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal in R, das eine Primärzerlegung besitzt. Dann ist die Menge der Radikale der Primärideale in minimalen Primärzerlegungen von a unabhängig von der gewählten Primärzerlegung.*

Für den Beweis verwenden wir Idealquotienten:

Definition 4.3.21 (Idealquotient)**.** Sei R ein Ring und $a \subset R$ ein Ideal. Ist $x \in R$, so definieren wir den *Idealquotienten von a und x* als

$$(a : x) := \{y \in R \mid x \cdot y \in a\} \subset R$$

(dabei handelt es sich um ein Ideal in R; nachrechnen).

Lemma 4.3.22 (Idealquotienten von Primäridealen)**.** *Sei R ein Ring, sei $q \subset R$ ein primäres Ideal und sei $p := \sqrt{q}$. Dann gilt für alle $x \in R$:*

1. *Ist $x \in q$, so ist $(q : x) = R$.*
2. *Ist $x \notin q$, so ist $(q : x)$ ein p-primäres Ideal. Insbesondere: $\sqrt{(q : x)} = p$.*

Beweis. Zu 1. Ist $x \in q$, so ist (da q ein Ideal ist)

$$(q : x) = \{y \in R \mid x \cdot y \in q\} = R.$$

Zu 2. Sei $x \notin q$. Es gilt $\sqrt{(q:x)} = p$, denn: Es gilt

$$q \subset (q:x) \subset p,$$

denn: Ist $y \in (q:x)$, so ist $x \cdot y \in q$, und damit (da $x \notin q$ und q primär ist) bereits $y \in \sqrt{q} = p$. Also ist $p = \sqrt{q} \subset \sqrt{(q:x)} \subset \sqrt{p} = p$, und damit $\sqrt{(q:x)} = p$.

Außerdem ist das Ideal $(q:x)$ primär, denn: Seien $y, z \in R$ mit $y \cdot z \in (q:x)$ und $z \notin \sqrt{(q:x)} = p$. Dann ist

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \in q,$$

und damit (da q primär ist und $z \notin \sqrt{q}$) also $x \cdot y \in q$. Dies liefert $y \in (q:x)$. Somit ist $(q:x)$ primär. □

Beweis von Satz 4.3.20. Sei $a = \bigcap_{j \in J} q_j$ eine minimale Primärzerlegung von a und $p_j := \sqrt{q_j}$ für alle $j \in J$. Es genügt zu zeigen, dass $\{p_j \mid j \in J\}$ mit der Menge

$$P := \left\{ \sqrt{(a:x)} \;\middle|\; x \in R \text{ und } \sqrt{(a:x)} \text{ ist prim} \right\}$$

übereinstimmt.

Wir verwenden nun Lemma 4.3.22, um die Menge P mit der Primärzerlegung zu verbinden: Für alle $x \in R$ gilt

$$(a:x) = \left(\left(\bigcap_{j \in J} q_j \right) : x \right) = \bigcap_{j \in J} (q_j : x).$$

Mit Lemma 4.3.22 erhalten wir daraus

$$\sqrt{(a:x)} = \sqrt{\bigcap_{j \in J} (q_j:x)} = \bigcap_{j \in J} \sqrt{(q_j:x)} = \bigcap_{j \in \{k \in J \mid x \notin q_k\}} p_j.$$

Dies liefert:

- Es ist $P \subset \{p_j \mid j \in J\}$, denn: Sei $x \in R$ mit der Eigenschaft, dass $\sqrt{(a:x)} \in P$ ist; insbesondere ist $\sqrt{(a:x)} \neq R$. Analog zum Beweis von Proposition 2.2.5 folgt, dass es dann bereits ein $j \in J$ mit $\sqrt{(a:x)} \supset p_j$ gibt. Also ist $\sqrt{(a:x)} = p_j$.

- Ist $j \in J$, so ist $p_j \in P$, denn: Da $a = \bigcap_{k \in J} q_k$ eine minimale Primärzerlegung von a ist, gibt es ein $x \in R$ mit

  $$x \notin q_j \quad \text{und} \quad x \in \bigcap_{k \in J \setminus \{j\}} q_k.$$

  Die obige Rechnung liefert dann $\sqrt{(a:x)} = p_j$. Also ist $p_j \in P$. □

Anmerkung zum Lernen. Bestimmen Sie in den Beispielen in diesem Abschnitt die zugehörigen Primideale zu den Primärzerlegungen und überprüfen Sie in diesen Beispielen die Gültigkeit von Satz 4.3.20.

Die Sätze 4.3.15 und 4.3.20 sind Teil der *Lasker-Noether-Sätze* zu Primärzerlegungen. Diese Sätze gehen für spezielle Ringe auf Lasker zurück und wurden dann von Noether allgemeiner und eleganter mithilfe der aufsteigenden Kettenbedingung bewiesen.

4.4 Artinsche Ringe

Wir werden im folgenden noethersche Ringe mit niedriger Dimension etwas genauer betrachten. Zum Beispiel stellt sich heraus, dass noethersche nulldimensionale Ringe eine bemerkenswerte Charakterisierung durch *absteigende* Ketten von Idealen besitzen. Es handelt sich dabei um die sogenannten artinschen Ringe:

Definition 4.4.1 (artinscher Ring)**.** Ein Ring R ist *artinsch*, wenn folgendes gilt: Für jede (bezüglich Inklusion) absteigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Idealen in R gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad a_n = a_N.$$

Beispiel 4.4.2 (artinsche Ringe)**.**

- Jeder Körper ist artinsch.
- Jeder endliche Ring ist artinsch.
- Die Idealkette
$$(2) \supsetneq (4) \supsetneq (8) \supsetneq \dots$$
zeigt, dass $\mathbb{Z}$ *nicht* artinsch ist.

  Analog folgt: Ist R ein nicht-trivialer Ring, so ist $R[T]$ *nicht* artinsch.
- Restklassenringe von artinschen Ringen sind artinsch (nachrechnen mithilfe von Idealketten, ähnlich zu Proposition 4.1.6).

Caveat 4.4.3. Obwohl die Definition artinscher Ringe „dual“ zur Definition noetherscher Ringe erscheint, ist es eine deutlich größere Einschränkung artinsch zu sein als noethersch. Ein erstes Beispiel dafür ist die folgende Proposition 4.4.4.

Proposition 4.4.4 (das Primspektrum artinscher Ringe)**.** *Sei R ein artinscher Ring. Dann gilt:*

1. *Jedes Primideal in R ist bereits maximal.*

2. *Der Ring R besitzt nur endlich viele maximale Ideale.*

3. *Es ist* $\operatorname{Spec} R = \operatorname{mSpec} R$ *endlich und diskret (bezüglich der Zariski-Topologie).*

Beweis. Zu 1. Sei $p \in \operatorname{Spec} R$. Wir zeigen, dass $R' := R/p$ ein Körper ist: Da R artinsch ist, ist auch R/p artinsch (Beispiel 4.4.2).

Sei $x \in R' \backslash \{0\}$. Da R' artinsch ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $(x^N) = (x^{N+1})$. Insbesondere gibt es ein $y \in R'$ mit

$$x^N = x^{N+1} \cdot y.$$

Da R' ein Integritätsring und $x \neq 0$ ist, folgt somit

$$1 = x \cdot y.$$

Also ist x eine Einheit in R', d.h. R' ist ein Körper.

Zu 2. Ohne Einschränkung sei R nicht der Nullring. Wir betrachten

$$M := \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} m_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0}, m_1, \ldots, m_n \in \operatorname{mSpec} R \right\}.$$

Dann ist M nicht-leer (da R mindestens ein maximales Ideal enthält) und partiell geordnet bezüglich Inklusion. Da R artinsch ist, folgt mit Lemma 4.1.5, dass M ein minimales Element m enthält. Nach Definition von M gibt es also ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $m_1, \ldots, m_n \in \operatorname{mSpec} R$ mit $m = m_1 \cap \cdots \cap m_n$.

Dann gilt $\operatorname{mSpec} R = \{m_1, \ldots, m_n\}$, denn: Sei $m' \in \operatorname{mSpec} R$. Da m minimal ist, folgt

$$m' \supset m' \cap (m_1 \cap \cdots \cap m_n) \supset m = m_1 \cap \cdots \cap m_n.$$

Also gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $m' \supset m_j$ (dies folgt analog zum Beweis von Proposition 2.2.5), . Da m_j und m' maximale Ideale sind, erhalten wir wie gewünscht $m' = m_j$.

Zu 3. Dies ist eine direkte Folgerung aus den ersten beiden Teilen und der Charakterisierung abgeschlossener Punkte in $\operatorname{Spec} R$ (Proposition 2.2.6). □

Satz 4.4.5 (artinsche Ringe vs. noethersche nulldimensionale Ringe)**.** *Sei R ein nicht-trivialer Ring. Dann sind äquivalent:*

1. *Der Ring R ist artinsch.*

2. *Der Ring R ist noethersch und es gilt* $\dim R = 0$.

Für den Beweis verwenden wir den folgenden Zusammenhang zwischen artinschen und noetherschen Ringen:

Lemma 4.4.6 (noethersch vs. artinsch)**.** *Sei R ein Ring und es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und maximale Ideale $m_1, \ldots, m_n \subset R$ mit $m_1 \cdot \cdots \cdot m_n = (0)$. Dann ist R genau dann noethersch, wenn R artinsch ist.*

Beweis. Man betrachtet die R/m_j-Vektorräume $m_1 \cdot \cdots m_{j-1}/m_1 \cdot \cdots m_j$ und Kettenbedingungen von Untermoduln. Man überlegt sich dann, wie sich diese Kettenbedingungen durch die einzelnen Stufen vererben. Dadurch kann man sich auf Endlichkeitsbedingungen von Vektorräumen zurückziehen: In Vektorräumen werden genau dann alle auf- bzw. absteigenden Ketten von Untervektorräumen stationär, wenn der gegebene Vektorraum endlich-dimensional ist. (Übungsaufgabe) □

Um dieses Lemma anwenden zu können, müssen wir Zerlegungen des Nullideals besser verstehen. An dieser Stelle kommt eine weitere Gemeinsamkeit von noetherschen und artinschen Ringen ins Spiel: ihr Nilradikal ist im folgenden Sinne nilpotent.

Lemma 4.4.7 (Nilradikal in noetherschen und artinschen Ringen)**.** *Sei R ein noetherscher oder artinscher Ring. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$(\sqrt[R]{0})^k = (0).$$

Beweis. Den *noetherschen Fall* beweist man, indem man ein endliches Erzeugendensystem des Nilradikals betrachtet und überlegt, was daher in hohen Potenzen des Nilradikals passiert (Übungsaufgabe).

Den *artinschen Fall* beweist man, indem man das Ideal $a := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} (\sqrt[R]{0})^n$ betrachtet und zeigt, dass $a = (0)$ ist. Wäre a nicht das Nullideal, so wäre die Menge M aller Ideale $b \subset R$ mit $a \cdot b \neq (0)$ nicht-leer und hätte somit ein bezüglich Inklusion minimales Element b (da R artinsch ist). Man folgert dann, dass b von einem Element erzeugt ist, und führt die Eigenschaften dieses Elements zum Widerspruch (Übungsaufgabe). □

Kombinieren wir die beiden vorigen Lemmata, so erhalten wir:

Lemma 4.4.8. *Sei R ein Ring und es gebe $n \in \mathbb{N}$ sowie maximale Ideale $m_1, \ldots, m_n$ in R mit*

$$\bigcap_{j=1}^{n} m_j = \sqrt[R]{0}.$$

Dann ist R genau dann noethersch, wenn R artinsch ist.

Beweis. Ist R noethersch oder artinsch, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $(\sqrt[R]{0})^k = (0)$ (Lemma 4.4.7). Somit folgt

$$m_1^k \cdot \cdots \cdot m_n^k = (m_1 \cdot \cdots \cdot m_n)^k \subset \left(\bigcap_{j=1}^{n} m_j \right)^k = (\sqrt[R]{0})^k = (0).$$

Mit Lemma 4.4.6 erhalten wir somit die Behauptung. □

Beweis von Satz 4.4.5. Nach Lemma 4.4.8 genügt es in den beiden Fällen eine Zerlegung des Nilradikals in maximale Ideale zu finden.

Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Sei R artinsch und nicht-trivial. Mit Proposition 4.4.4 folgt, dass $\dim R = 0$ ist (da jedes Primideal bereits maximal ist und R mindestens ein Primideal enthält).

Außerdem ist R noethersch, denn: Nach Proposition 4.4.4 ist $\operatorname{Spec} R = \operatorname{mSpec} R$ endlich, etwa $\{m_1, \ldots, m_n\}$. Also ist

$$\sqrt[R]{0} = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p = \bigcap_{j=1}^{n} m_j$$

(Proposition 2.2.28), wie gewünscht.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1. Sei umgekehrt R ein noetherscher Ring mit $\dim R = 0$. Dann ist R artinsch, denn: Das Nullideal von R besitzt (wie jedes Ideal in R) eine Primärzerlegung (Satz 4.3.15). Nach Proposition 4.3.13 gibt es somit nur endlich viele minimale Primideale $p_1, \ldots, p_n$ in R und es gilt (Proposition 2.2.28)

$$\sqrt[R]{0} = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p = \bigcap_{j=1}^{n} p_j.$$

Wegen $\dim R = 0$ sind $p_1, \ldots, p_n$ bereits maximale Ideale. □

Ausblick 4.4.9 (Struktursatz für artinsche Ringe)**.** Mit denselben Techniken kann man artinsche Ringe noch detaillierter beschreiben. Zum Beispiel gilt: Ist R ein artinscher Ring, so ist R ein endliches Produkt von lokalen artinschen Ringen; diese Zerlegung ist bis auf Permutation der Faktoren und Isomorphie der Faktoren eindeutig [2, Theorem 8.7].

4.5 Dedekindringe

In einer systematischen, dimensionsgesteuerten, Untersuchung noetherscher Ringe ist der nächste Schritt die Betrachtung eindimensionaler noetherscher Ringe. Solche Ringe haben gute Faktorisierungseigenschaften für Ideale (Proposition 4.5.1). Eine spezielle Klasse dieser Ringe spielt daher eine wichtige Rolle in der algebraischen Zahlentheorie: die Dedekindringe (Definition 4.5.3).

Proposition 4.5.1 (Idealfaktorisierung in noetherschen eindimensionalen Ringen)**.** *Sei R ein noetherscher Integritätsring mit $\dim R = 1$. Dann besitzt jedes nicht-triviale Ideal in R eine Darstellung als Produkt von primären Idealen mit verschiedenen Radikalen.*

Beweis. Sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a \neq (0)$ und $a \neq R$. Dann besitzt a eine minimale Primärzerlegung

$$a = \bigcap_{j=1}^{n} q_j$$

mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und primären Idealen $q_1, \ldots, q_n$ (Satz 4.3.15). Zu $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $p_j := \sqrt{q_j}$.

Da $a \neq (0)$ ist und R ein Integritätsring ist, ist keines der Ideale $p_1, \ldots, p_n$ das Nullideal. Wegen $\dim R = 1$ sind diese Ideale also alle maximal und (da sie paarweise verschieden sind) paarweise koprim (d.h. $p_j + p_k = R$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$; nachrechnen).

Damit folgt, dass auch $q_1, \ldots, q_n$ paarweise koprim sind: Seien $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$. Da p_j und p_k koprim sind, gibt es $x \in p_j$, $y \in p_k$ mit $x + y = 1$. Wegen $p_j = \sqrt{q_j}$ und $p_k = \sqrt{q_k}$ gibt es $r, s \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $x^r \in q_j$ und $y^s \in q_k$. Dann ist $1 = (x + y)^{r+s} \in q_j + q_k$. Also sind q_j und q_k koprim.

Induktiv erhalten wir (nachrechnen)

$$a = \bigcap_{j=1}^{n} q_j = q_1 \cdot \cdots \cdot q_n. \qquad \square$$

Diese Produktdarstellung ist dabei sogar eindeutig [2, Proposition 9.1].

Um ein besseres Gefühl für diese Situation zu bekommen, geben wir ein paar Beispiele für eindimensionale noethersche Integritätsringe:

Beispiel 4.5.2 (eindimensionale noethersche Integritätsringe)**.**

- Ist R ein Hauptidealring, der kein Körper ist, (zum Beispiel $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}[T]$) so ist R ein eindimensionaler noetherscher Integritätsring.

- Sei R ein noetherscher Integritätsring der Dimension 2 und sei $p \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal, das nicht maximal und nicht das Nullideal ist. Dann ist R/p ein noetherscher Integritätsring (Proposition 4.1.6) der Dimension 1 (nachrechnen; mit Proposition 2.1.17).

  Also sind

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}[i] &\cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}[T]/(T^2+1) \\
\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] &\cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}[T]/(T^2+5) \\
\mathbb{Z}\Big[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big] &\cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}[T]/(T^2-T-1) \qquad \text{(goldener Schnitt!)} \\
\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y-X^2)] &= \mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2) \\
\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2-X^3-X^2)] &= \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^3-X^2)
\end{aligned}$$

  eindimensionale noethersche Integritätsringe.

  Der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ist kein Hauptidealring; aber das Ideal (6) besitzt die folgende Zerlegung als Produkt von Primidealen (nachrechnen; mithilfe von Beispiel 4.3.11):

$$(6) = (2, 1 + i\sqrt{5})^2 \cdot (3, 1 + i\sqrt{5}) \cdot (3, 1 - i\sqrt{5}).$$

Noch näher an einer Primzerlegung sind wir in Proposition 4.5.1, wenn zusätzlich jedes Primärideal eine Potenz eines Primideals ist. Man definiert daher:

Definition 4.5.3 (Dedekindring)**.** Ein Ring R ist ein *Dedekindring*, wenn die folgenden Bedingungen alle erfüllt sind:

- Es ist R ein noetherscher Integritätsring.
- Es ist $\dim R = 1$.
- Für jedes primäre Ideal $q \subset R$ gibt es ein Primideal $p \subset R$ und ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $q = p^n$.

Beispiel 4.5.4 (Dedekindringe)**.** Jeder Hauptidealring, der kein Körper ist, ist ein Dedekindring (dies folgt analog zu Beispiel 4.3.5). Insbesondere ist

$$\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y - X^2)] = \mathbb{C}[X, Y]/(Y - X^2) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}[T]$$

ein Dedekindring.

Bemerkung 4.5.5 (Idealfaktorisierung in Dedekindringen)**.** Nach Definition besitzt also jedes nicht-triviale Ideal in einem Dedekindring eine Darstellung als Produkt endlich vieler Primideale.

Man kann diese Idealarithmetik in Dedekindringen noch weiter fortführen; dies führt zur Idealklassengruppe, einer wichtigen Invariante der algebraischen Zahlentheorie [2, S. 96].

Die letzte Bedingung der obigen Definition von Dedekindringen ist im allgemeinen schwierig nachzuprüfen. Wir geben im folgenden ein lokale Charakterisierung von Dedekindringen.

Caveat 4.5.6. Die lokale Charakterisierung aus Satz 4.5.11 führt zu vielen äquivalenten Charakterisierungen von Dedekindringen. Das Konzept des Dedekindrings hat also sehr viele Facetten. Je nach Anwendung sind verschiedene dieser Charakterisierungen besonders hilfreich. Daher findet man auch in der Literatur viele sehr unterschiedlich aussehende Definitionen für den Begriff des Dedekindrings (die jedoch alle äquivalent sind).

4.5.1 Diskrete Bewertungsringe

Diese lokale Charakterisierung von Dedekindringen beruht auf sogenannten diskreten Bewertungsringen.

Definition 4.5.7 (diskreter Bewertungsring)**.** Sei K ein Körper.

- Eine *diskrete Bewertung auf* K ist eine surjektive Abbildung $\nu\colon K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit:

$$\begin{aligned} \forall_{x,y\in K^\times} \quad & \nu(x\cdot y) = \nu(x) + \nu(y) \\ \forall_{x,y\in K^\times} \quad & \nu(x+y) \geq \min\bigl(\nu(x),\nu(y)\bigr). \end{aligned}$$

Außerdem definiert man $\nu(0) := \infty$.

- Der Ring (nachrechnen)

$$\bigl\{x \in K \;\big|\; \nu(x) \geq 0\bigr\} \subset K$$

ist der *Bewertungsring von* ν.

- Ein Integritätsring R ist ein *diskreter Bewertungsring*, wenn es eine Bewertung ν auf $Q(R)$ gibt, so dass R unter der kanonischen Inklusion $R \longrightarrow Q(R)$ mit dem Bewertungsring von ν übereinstimmt.

Beispiel 4.5.8 (adische Bewertungen)**.** Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Dann ist

$$\begin{aligned} \nu_p \colon \mathbb{Q}^\times &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ p^n \cdot \frac{a}{b} &\longmapsto n \\ \text{mit } p \nmid a\cdot b & \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung auf $\mathbb{Q}$ (nachrechnen); die *p-adische Bewertung*. Der Bewertungsring von ν_p stimmt dabei mit $\mathbb{Z}_{(p)}$ überein.

Analog: Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist

$$\begin{aligned} \nu_f \colon K(T)^\times &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f^n \cdot \frac{a}{b} &\longmapsto n \\ \text{mit } f \nmid a\cdot b & \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung auf $K(T)$ (nachrechnen). Der Bewertungsring von ν_f stimmt dabei mit $K[T]_{(f)}$ überein.

Proposition 4.5.9 (grundlegende Eigenschaften von diskreten Bewertungsringen)**.** *Sei R ein diskreter Bewertungsring zur Bewertung ν auf $K := Q(R)$; wir fassen im folgenden R als Teilmenge von K auf. Dann gilt:*

1. *Es gilt $R^\times = \{x \in K \mid \nu(x) = 0\}$.*
2. *Der Ring R ist lokal, mit maximalem Ideal*

$$m := \bigl\{x \in K \;\big|\; \nu(x) > 0\bigr\}.$$

3. *Ist $a \subset R$ ein Ideal mit $a \neq (0)$ und $a \neq R$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a = m^n$.*

4. Der Ring R ist ein Hauptidealring (aber kein Körper); insbesondere ist R noethersch und $\dim R = 1$.

Beweis. Zu 1. Wegen $\nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1)$ folgt $\nu(1) = 0$.

Sei nun $x \in R \setminus \{0\}$ (d.h. $\nu(x) \geq 0$) und $y := 1/x \in K$. Dann ist

$$0 = \nu(1) = \nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y).$$

Also gilt genau dann $\nu(y) \geq 0$, wenn $\nu(x) = 0$ ist. Daher liegt y genau dann in R, wenn $\nu(x) = 0$ ist.

Zu 2. Es ist m ein Ideal (nachrechnen) und $m \neq R$, denn $\nu(1) = 0$.

Nach dem Lokalitätskriterium aus Proposition 3.1.3 genügt es zu zeigen, dass jedes Element aus $R \setminus m$ eine Einheit ist. Wegen $R \setminus m = \{x \in K \mid \nu(x) = 0\}$ folgt mit dem ersten Teil die Behauptung.

Zu 3. Wegen $\nu(a) \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gibt es ein Element $x \in a$ mit minimalem ν-Wert. Dabei ist $\nu(x) \neq 0$ (wegen $a \neq R$ ist $x \notin R^\times$) und $\nu(x) \neq \infty$ (wegen $a \neq (0)$ ist $a \setminus \{0\} \neq \emptyset$).

Dann gilt bereits $a = (x)$, denn

$$\big\{y \in R \;\big|\; \nu(y) \geq \nu(x)\big\} \subset (x) \subset a \subset \big\{y \in R \;\big|\; \nu(y) \geq \nu(x)\big\}.$$

Die erste Inklusion folgt dabei mit dem ersten Teil: Ist $y \in K$ mit $\nu(y) \geq \nu(x)$, so ist $\nu(y/x) \geq 0$, und damit $y/x \in R$; also ist $y = y/x \cdot x \in (x)$.

Da $\nu\colon K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist, gibt es ein $z \in R$ mit $\nu(z) = 1$. Nach dem vorigen Argument ist $m = (z) = \{y \in R \mid \nu(y) \geq 1\}$ und $z^{\nu(x)} \in a$, und damit

$$a = m^{\nu(x)}.$$

Zu 4. Aus dem Beweis des dritten Teils ist klar, dass R ein Hauptidealring ist und dass $m \neq (0)$ ist; also ist R *kein* Körper. □

Proposition 4.5.10 (Charakterisierung von diskreten Bewertungsringen)**.** *Sei R ein lokaler noetherscher Integritätsring mit* $\dim R = 1$*; sei m das maximale Ideal von R. Dann sind äquivalent:*

1. *Der Ring R ist ein diskreter Bewertungsring.*
2. *Für jedes Ideal $a \subset R$ mit $a \neq (0)$ und $a \neq R$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a = m^n$.*

Beweis. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Dies folgt aus Proposition 4.5.9.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1. Sei umgekehrt die zweite Bedingung erfüllt. Wir konstruieren nun eine geeignete diskrete Bewertung ν auf $Q(R)$:

Da R noethersch ist, ist das Ideal m endlich erzeugt; wegen $\dim R = 1$ ist außerdem $m \neq (0)$. Mit dem Lemma von Nakayama (Lemma 3.1.9) folgt daher: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist $m^n \neq m^{n+1}$. Mit der zweiten Bedingung erhalten wir daher, dass es zu jedem $x \in R \setminus \{0\}$ ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$ mit $(x) = m^n$ gibt (wobei $m^0 = R$). Wir definieren dann

$$\nu(x) := n.$$

Wir erweitern ν auf $Q(R)^\times$ durch

$$\begin{aligned} \nu\colon Q(R)^\times &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \frac{a}{b} &\longmapsto \nu(a) - \nu(b). \end{aligned}$$

Dies ist eine wohldefinierte diskrete Bewertung auf $Q(R)$:

- Wohldefiniertheit: Seien $a, a', b, b' \in R \setminus \{0\}$ und $a/b = a'/b'$. Dann ist $a \cdot b' = a' \cdot b$ und aus der Definition von ν auf R folgt

  $$\nu(a) + \nu(b') = \nu(a \cdot b) = \nu(a' \cdot b) = \nu(a') + \nu(b),$$

  und damit $\nu(a) - \nu(b) = \nu(a') - \nu(b')$. Also ist ν auf $Q(R)^\times$ wohldefiniert.

- Die Surjektivität von ν folgt daraus, dass $m^n \neq m^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Verträglichkeit mit Multiplikation: Die Verträglichkeit mit der Multiplikation kann man wie die Wohldefiniertheit nachweisen.

- Verträglichkeit mit Addition: Seien $a, a', b, b' \in R \setminus \{0\}$. Dann gilt

  $$\begin{aligned} \nu\Big(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\Big) &= \nu\Big(\frac{a \cdot b' + a' \cdot b}{b \cdot b'}\Big) \\ &= \nu(a \cdot b' + a' \cdot b) - \nu(b \cdot b') \\ &= \min\big(\nu(a) + \nu(b'), \nu(a') + \nu(b)\big) - \nu(b) - \nu(b') \\ &= \min\Big(\nu\Big(\frac{a}{b}\Big), \nu\Big(\frac{a'}{b'}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\Big\{\frac{r}{1} \;\Big|\; r \in R\Big\} = \{0\} \cup \big\{x \in Q(R)^\times \;\big|\; \nu(x) \geq 0\big\},$$

denn: Nach Konstrukion von ν ist die linke Seite in der rechten Seite enthalten. Seien umgekehrt $a, b \in R \setminus \{0\}$ mit $\nu(a/b) \geq 0$. Wir setzen $n := \nu(a)$, $k := \nu(b)$. Dann ist

$$n - k = \nu(a) - \nu(b) = \nu\Big(\frac{a}{b}\Big) \geq 0,$$

und damit

$$(b) = m^k \supset m^n = (a).$$

Also ist b in R ein Teiler von a, d.h. a/b liegt in $\{r/1 \mid r \in R\}$.

Also ist R ein diskreter Bewertungsring. □

4.5.2 Eine lokale Charakterisierung von Dedekindringen

Satz 4.5.11 (lokale Charakterisierung von Dedekindringen)**.** *Sei R ein noetherscher Integritätsring mit* $\dim R = 1$*. Dann sind äquivalent:*

1. *Der Ring R ist ein Dedekindring.*
2. *Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ mit $p \neq (0)$ ist R_p ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis. Da R ein Integritätsring ist, können wir R als Teilmenge von $Q(R)$ auffassen; außerdem werden wir auch die Lokalisierungen von R an (Komplementen von) Primidealen als Teilmengen von $Q(R)$ auffassen.

Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Sei R ein Dedekindring und sei $p \in \operatorname{Spec} R$ mit $p \neq (0)$. Dann ist die Lokalisierung R_p (als Teilring von $Q(R)$) ein Integritätsring, ein lokaler Ring (Korollar 3.3.3) und $\dim R_p \leq 1$ (Satz 3.3.8); wegen $p \neq (0)$ ist sogar $\dim R_p = 1$ (Proposition 3.3.2). Außerdem ist R_p noethersch (nachrechnen mit Proposition 3.3.1). Wir verwenden nun die Charakterisierung aus Proposition 4.5.10: Sei $a \subset R_p$ ein Ideal mit $a \neq (0)$ und $a \neq R_p$. Sei $\overline{a} := a \cap R$ das zugehörige Ideal in R. Da R ein Dedekindring ist, besitzt $\overline{a}$ eine Primzerlegung

$$\overline{a} = p^n \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_d$$

mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $d \in \mathbb{N}$, sowie Primidealen $p_1, \dots, p_d \in \operatorname{Spec} R \setminus \{p, (0)\}$ (Bemerkung 4.5.5). Also ist (mit $S := R \setminus p$)

$$\begin{aligned} a &= S^{-1}\overline{a} && \text{(Lemma 3.3.1)} \\ &= (S^{-1}p)^n \cdot S^{-1}p_1 \cdot \dots \cdot S^{-1}p_d && \text{(nachrechnen).} \end{aligned}$$

Wegen $p_j \notin \{p, (0)\}$ und $\dim R_p = 1$ ist $p_j \cap p = (0)$ bzw. $S^{-1}p_j = R_p$. Also erhalten wir

$$a = (S^{-1}p)^n.$$

Da $S^{-1}p$ das maximale Ideal von R_p ist (Korollar 3.3.3), können wir nun Proposition 4.5.10 anwenden.

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1. Sei umgekehrt die zweite Bedingung erfüllt. Dann ist R ein Dedekindring, denn: Sei $q \subset R$ ein primäres Ideal und $p := \sqrt{q}$; ohne Einschränkung sei dabei $p \neq (0)$ (nach Voraussetzung ist R ein Integritätsring). Wir schreiben nun $S := R \setminus p \subset R$.

Nach Voraussetzung ist R_p ein diskreter Bewertungsring (mit maximalem Ideal $m := S^{-1}p$) und $S^{-1}q$ ist weder (0) noch R_p. Also gibt es aufgrund von Proposition 4.5.9 ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$S^{-1}q = m^n = S^{-1}p^n.$$

Daraus folgt aber bereits $q = p^n$ (analog zum Beweis der Injektivität in Proposition 3.3.2). $\square$

Findet man nun geeignete weitere Kriterien, wann lokale Ringe diskrete Bewertungsringe sind, so erhält man mit Satz 4.5.11 eine entsprechende Charakterisierung für Dedekindringe. In der algebraischen Geometrie sind dies im Normalfall Regularitätsbedingungen, in der algebraischen Zahlentheorie Abschlusseigenschaften.

Beispiel 4.5.12.

- Sei $R := \mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2)]$. Dann ist R *kein* Dedekindring, da die Lokalisierung an $([X], [Y])$ *kein* diskreter Bewertungsring ist (dieser lokale Ring entdeckt die Selbstüberschneidung; Übungsaufgabe).
- Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ ist *kein* Dedekindring, da die Lokalisierung an $(2, 1 + \sqrt{5})$ *kein* diskreter Bewertungsring ist (dieser lokale Ring hat zu schlechte Abschlusseigenschaften; Übungsaufgabe).

Ausblick 4.5.13. In der algebraischen Zahlentheorie ist es am bequemsten mit der Charakterisierung über ganze Abgeschlossenheit zu arbeiten [2, Theorem 9.3, Theorem 9.5]. Zum Beispiel kann man daran ablesen, dass $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$ ein Dedekindring ist – obwohl $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ *kein* Dedekindring ist. Außerdem ist auch $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ein Dedekindring.

5

Elementare Homologische Algebra

Bei der Zerlegung algebraischer Objekte in kleinere Teile treten oft exakte Sequenzen auf. Da nicht alle Funktoren mit exakten Sequenzen verträglich sind, ist es nützlich einen allgemeineren Kontext zu betrachten, nämlich die Kategorie der Kettenkomplexe. Die Nicht-Exaktheit eines Kettenkomplexes wird dabei durch die Homologie gemessen. Wir werden in diesem Kapitel die Grundbegriffe dieser Theorie einführen und als Anwendung erklären, wie man Funktoren konstruieren kann, die die Nicht-Exaktheit des Tensorprodukts kompensieren.

Überblick über dieses Kapitel.

5.1	Kettenkomplexe und Homologie	150
5.2	Projektive Auflösungen	159
5.3	Tor	170

Schlüsselbeispiel. simpliziale Auflösungen

5.1 Kettenkomplexe und Homologie

Kettenkomplexe sind eine Verallgemeinerung von exakten Sequenzen. Ihre Nicht-Exaktheit wird durch die Homologie gemessen.

5.1.1 Die Kategorie der Kettenkomplexe

Wir beschränken uns im folgenden auf Kettenkomplexe von Linksmoduln. Analog erhält man entsprechende Begriffe auch für Rechts- bzw. Bimoduln.

Definition 5.1.1 (Kettenkomplex)**.** Sei R ein ninoko Ring. Ein *R-Kettenkomplex* ist ein Paar $C = (C_*, \partial_*)$, wobei

- $C_* = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von R-Linksmoduln (den sogenannten *Kettenmoduln*)
- und $\partial_* = (\partial_n \colon C_n \longrightarrow C_{n-1})_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine Folge von R-Modulhomomorphismen (den *Randoperatoren* oder *Differentialen*) mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \quad \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

ist. Sei $n \in \mathbb{N}$.

- Die Elemente von C_n heißen *n-Ketten.*
- Die Elemente von $Z_nC := \ker \partial_n$ heißen *n-Zykel.* (Man definiert zusätzlich $\partial_0 := 0$ und $Z_0C := C_0$.)
- Die Elemente von $B_nC := \operatorname{im} \partial_{n+1}$ heißen *n-Ränder.*

Analog kann man auch Kettenkomplexe betrachten, die über $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}\cup\{-1\}$ oder ähnliches indiziert sind.

Beispiel 5.1.2 (Kettenkomplexe)**.**

- Jede (über $\mathbb{N}$ indizierte) exakte Sequenz ist ein Kettenkomplex.
- Die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$$

  ist *kein* Kettenkomplex von $\mathbb{Z}$-Moduln, da die zweifache Komposition des Randoperators nicht die Nullabbildung ist.

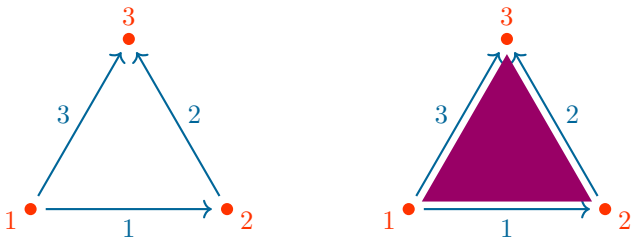


Abbildung 5.1.: Der Rand eines Dreiecks und ein Dreieck; Grad 0 in rot, Grad 1 in blau, Grad 2 in lila.

Beispiel 5.1.3 (ein geometrisches Beispiel)**.** Die Begriffe Zykel, Ränder, Ketten, ... haben ihren Ursprung in der algebraischen Topologie. Wir illustrieren dies an einem einfachen Beispiel:

Wir betrachten die folgenden Kettenkomplexe $C = (C_*, \partial_*)$ und $C' = (C'_*, \partial'_*)$ von $\mathbb{Z}$-Moduln: Sei

$$C_0 := \mathbb{Z}^3, \quad C_1 := \mathbb{Z}^3, \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \quad C_n := 0.$$

und der nicht-triviale Randoperator sei durch

$$\begin{aligned} \partial_1 \colon C_1 = \mathbb{Z}^3 &\longrightarrow \mathbb{Z}^3 = C_0 \\ e_1 &\longmapsto e_2 - e_1 \\ e_2 &\longmapsto e_3 - e_2 \\ e_3 &\longmapsto e_3 - e_1 \end{aligned}$$

gegeben; dabei ist nach Konstruktion die Verknüpfung von je zwei aufeinanderfolgenden Randoperatoren die Nullabbildung. Sei

$$C'_0 := \mathbb{Z}^3, \quad C'_1 := \mathbb{Z}^3, \quad C'_2 := \mathbb{Z}, \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 3}} \quad C'_n := 0.$$

und die nicht-trivialen Randoperatoren seien durch

$$\begin{aligned} \partial'_1 &:= \partial_1 \\ \partial'_2 \colon C'_2 &\longrightarrow C'_1 \\ 1 &\longmapsto e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

gegeben; dabei ist tatsächlich $\partial'_1 \circ \partial'_2 = 0$ (nachrechnen).

Diese Kettenkomplexe kann man als algebraische Modelle der geometrischen Objekte aus Abbildung 5.1 ansehen (s. algebraische Topologie): Die Ecken entsprechen der Standardbasis in $C_0 = C'_0$, die Kanten der Standardbasis in $C_1 = C'_1$ und das gefüllte Dreieck der 1 in C'_2. Die Randoperatoren entsprechen dabei dem geometrischen Rand dieser geometrischen Objekte.

Die 1-Kette $z := e_1 + e_2 - e_3$ ist ein 1-Zykel von C (und C'), denn

$$\partial_1(z) = \partial_1(e_1 + e_2 - e_3) = 0.$$

Man beachte, dass dies auch mit der Anschauung eines Zykels übereinstimmt. Der Komplex C ist *nicht* exakt, denn: Es gilt $z \in \ker \partial_1$, aber $z \notin \{0\} = \operatorname{im} \partial_2$. In C ist z also *kein* Rand (was auch mit der Anschauung übereinstimmt).

In C' ist z jedoch ein Rand, denn $\partial'_2(1) = z$ (und auch das stimmt mit der Anschauung überein).

Bemerkung 5.1.4 (Ko)**.** Dreht man die Richtungen der Pfeile in der Definition von Kettenkomplexen um, so erhält man *Kokettenkomplexe* (und Koketten, Kozykel, Koränder, Korandoperatoren, Kokettenabbildungen, Kohomologie, ...). Das Differential von Kokettenkomplexen bezeichnet man zumeist mit δ (statt ∂) und die Indizes wandern nach oben.

Bei der Analysis auf Mannigfaltigkeiten treten solche Objekte zum Beispiel bei der Untersuchung von Differentialformen auf: der De-Rham-Kokettenkomplex und die De-Rham-Kohomologie.

Um eine Kategorie von Kettenkomplexen zu erhalten, definieren wir Kettenabbildungen als strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kettenkomplexen:

Definition 5.1.5 (Kettenabbildung)**.** Sei R ein ninoko Ring und seien $C = (C_*, \partial_*)$ und (C'_*, ∂'_*) Kettenkomplexe von R-Linksmoduln. Eine *R-Kettenabbildung* $C \longrightarrow C'$ ist eine Folge $(f_n \in {}_R\mathrm{Hom}(C_n, C'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow[\partial'_{n+1}]{} & C'_n & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Beispiel 5.1.6 (eine Kettenabbildung)**.** Sei C der Kettenkomplex aus Beispiel 5.1.3. Dann bilden die Homomorphismen

$$\begin{aligned}
C_0 &\longmapsto C_0 \\
x &\longmapsto (x_2, x_1, x_3) \\
C_1 &\longmapsto C_1 \\
x &\longmapsto (-x_1, x_3, x_2)
\end{aligned}$$

eine Kettenabbildung $C \longrightarrow C$ (nachrechnen). Anschaulich ist dies die Spiegelung des Dreiecks aus Abbildung 5.1 an der vertikalen Achse.

Man überlegt sich leicht, dass die gradweise Identität von Kettenkomplexen eine Kettenabbildung ist und dass die gradweise Komposition von Kettenabbildungen eine Kettenabbildung ist. Daher erhält man eine Kategorie:

Definition 5.1.7 (Kategorie der Kettenkomplexe)**.** Sei R ein ninoko Ring. Die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Kettenkomplexe von R-Linksmoduln besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ die Klasse aller Kettenkomplexe von R-Linksmoduln.
- Morphismen: Sind C und C' Kettenkomplexe von R-Linksmoduln, so sei $\mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, C')$ die Menge aller R-Kettenabbildungen $C \longrightarrow C'$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch gradweise gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

5.1.2 Homologie von Kettenkomplexen

Homologie misst die Nicht-Exaktheit von Kettenkomplexen.

Definition 5.1.8 (Homologie)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei $C = (C_*, \partial_*)$ ein Kettenkomplex von R-Linksmoduln. Ist $n \in \mathbb{N}$, so bezeichnet man den R-Linksmodul

$$H_n(C) := \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} = \frac{\ker(\partial_n \colon C_n \to C_{n-1}}{\mathrm{im}(\partial_{n+1} \colon C_{n+1} \to C_n} \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$$

als *n-te Homologie von C*.

Beispiel 5.1.9 (Homologie)**.**

- Sei R ein ninoko Ring. Ein Kettenkomplex $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ist genau dann eine exakte Sequenz, wenn $H_n(C) \cong_R \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Dabei eingeschlossen ist Exaktheit in Grad 0.)
- Für die Kettenkomplexe C und C' aus Beispiel 5.1.3 gilt (nachrechnen)

  $$H_1(C) \cong_{\mathbb{Z}} \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2 = \ker \partial_1 / \{0\} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}, \qquad \text{(erzeugt von } z\text{)}$$
  $$H_1(C') \cong_{\mathbb{Z}} \ker \partial_1' / \operatorname{im} \partial_2' \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}. \qquad \text{(da } z \text{ in } C' \text{ ein Rand ist)}$$

  Die Homologie im Grad 1 erkennt also das „Loch“. Dies ist einer der Grundgedanken für Homologietheorien in der algebraischen Topologie.

Algorithmisch lässt sich Homologie mit den Methoden der linearen Algebra berechnen (über Körpern mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (Satz I.5.2.8), über euklidischen Ringen/Hauptidealringen mit der Smith-Normalform (Satz II.2.5.6)).

Proposition 5.1.10 (Homologie als Funktor)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Seien $C, C' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, sei $f\colon C \longrightarrow C'$ eine R-Kettenabbildung. Dann ist*

$$\begin{aligned} H_n(f)\colon H_n(C) &\longrightarrow H_n(C') \\ [z] &\longmapsto \big[f_n(z)\big] \end{aligned}$$

   ein wohldefinierter R-Modulhomomorphismus.

2. *Auf diese Weise wird H_n zu einem Funktor ${}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$.*

Beweis. Zu 1. Die Abbildung $H_n(f)$ ist wohldefiniert, denn: Da f eine Kettenabbildung ist, bildet f_n Zykel auf Zykel ab. Seien $z, z' \in Z_n(C)$ mit $z - z' \in B_n(C)$; sei etwa $b \in C_{n+1}$ mit $\partial_{n+1} b = z - z'$. Dann erhalten wir in $H_n(C')$:

$$\begin{aligned} \big[f_n(z)\big] - \big[f_n(z')\big] &= \big[f_n(z) - f_n(z')\big] \\ &= \big[f_n(z - z')\big] \\ &= \big[f_n(\partial_{n+1} b)\big] && \text{(Wahl von } b\text{)} \\ &= \big[\partial'_n f_{n+1}(b)\big] && (f \text{ ist eine Kettenabbildung}) \\ &= 0. && \text{(Definition von } H_n(C')\text{)} \end{aligned}$$

Also ist $H_n(f)$ wohldefiniert. Nach Konstruktion ist $H_n(f)$ außerdem R-linear (da f_n eine R-lineare Abbildung ist).

Zu 2. Aus der Konstruktion ist klar ersichtlich, dass H_n die Identität auf die Identität abbildet und dass H_n mit der Komposition von Kettenabbildungen verträglich ist. □

Beispiel 5.1.11 (eine induzierte Abbildung in Homologie)**.** Sei $f\colon C \longrightarrow C$ die Kettenabbildung aus Beispiel 5.1.6. Da $[z]$ eine Basis von $H_1(C)$ ist (Beispiel 5.1.9), genügt es, $H_1(f)([z])$ zu bestimmen. Nach Definition von f ist

$$H_1(f)\big([z]\big) = \big[f_1(z)\big] = \big[f_1(e_1 + e_2 - e_3)\big] = [-e_1 - e_2 + e_3] = -[z],$$

und damit $H_1(f) = -\operatorname{id}_{H_1(C)}$.

Eine für die Topologie zentrale Eigenschaft ist, dass Homologie homotopieinvariant ist. Im algebraischen Kontext bedeutet dies das folgende:

Definition 5.1.12 (Kettenhomotopie, kettenhomotopieäquivalent)**.** Sei R ein ninoko Ring, seien $C, C' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g\colon C \longrightarrow C'$ Kettenabbildungen.

- Dann sind f und g *kettenhomotop*, kurz $f \simeq_R g$, wenn es eine Kettenhomotopie von f nach g gibt.

- Dabei ist eine *Kettenhomotopie von f nach g* eine Folge

$$(h_n \in {}_R\mathrm{Hom}(C_n, C'_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$$

mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n.$$

- Die Kettenabbildung f ist eine *Kettenhomotopieäquivalenz*, wenn es eine Kettenabbildung $f' \colon C' \longrightarrow C$ mit

$$f \circ f' \simeq_R \mathrm{id}_{C'} \quad \text{und} \quad f' \circ f \simeq_R \mathrm{id}_C$$

gibt. In diesem Fall nennen wir C und C' *kettenhomotopieäquivalent* und schreiben $C \simeq_R C'$.

Caveat 5.1.13. In der Literatur finden sich verschiedene Vorzeichenkonventionen bei der Definition von Kettenhomotopien. Alle diese Konventionen liefern denselben Kettenhomotopiebegriff.

In der algebraischen Topologie werden wir sehen, wie sich dieser Homotopiebegriff für Kettenabbildungen ganz natürlich auf geometrische Weise ergibt.

Proposition 5.1.14 (Homotopieinvarianz von Homologie)**.** *Sei R ein ninoko Ring, seien $C, C' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g \colon C \longrightarrow C'$ Kettenabbildungen mit $f \simeq_R g$. Dann gilt*

$$H_n(f) = H_n(g)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere: Gilt $C \simeq_R C'$, so folgt $H_n(C) \cong_R H_n(C')$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei h eine Kettenhomotopie von f nach g. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in Z_n(C)$ ein n-Zykel. Dann gilt in $H_n(C')$:

$$\begin{aligned} H_n(f)\big([z]\big) - H_n(g)\big([z]\big) &= \big[f_n(z) - g_n(z)\big] \\ &= \big[\partial'_{n+1} \circ h_n(z) + h_{n-1} \circ \partial_n(z)\big] && (h \text{ ist Kettenhomotopie}) \\ &= \big[\partial'_{n+1} \circ h_n(z) + 0\big] && (z \text{ ist ein Zykel}) \\ &= [0]. && (\text{Definition von } H_n(C')) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt mit der Funktorialität aus der ersten. □

Ausblick 5.1.15 (die Homotopiekategorie)**.** Sei R ein ninoko Ring. Um das Arbeiten mit Kettenhomotopien etc. zu vereinfachen, kann man zur *Homotopiekategorie* von ${}_R\mathsf{Ch}$ übergehen: Die Objekte dieser Kategorie sind die Objekte von ${}_R\mathsf{Ch}$. Die Morphismen sind die Äquivalenzklassen der Mengen von Kettenabbildungen modulo Kettenhomotopie. Dann entsprechen Kettenhomotopieäquivalenzen in ${}_R\mathsf{Ch}$ genau den Isomorphismen in der Homotopiekategorie.

5.1.3 Fünferlemma und lange exakte Homologiesequenz

Neben der direkten Berechnung von Homologie anhand der Definition gibt es viele Zerlegungs- und Übersetzungsprinzipien. Die wichtigsten stellen wir in diesem Abschnitt vor. Die Beweistechnik ist jeweils die sogenannte Diagrammjagd.

Proposition 5.1.16 (Fünferlemma). *Sei R ein ninoko Ring und sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \downarrow{\scriptstyle f_D} & & \downarrow{\scriptstyle f_E} \\ A' & \xrightarrow[a']{} & B' & \xrightarrow[b']{} & C' & \xrightarrow[c']{} & D' & \xrightarrow[d']{} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Dann gilt:

1. *Sind f_B, f_D injektiv und ist f_A surjektiv, so ist f_C injektiv.*
2. *Sind f_B, f_D surjektiv und ist f_E injektiv, so ist f_C surjektiv.*
3. *Insbesondere gilt: Sind f_A, f_B, f_D, f_E Isomorphismen, so ist f_C ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil mithilfe einer sogenannten Diagrammjagd (viele Aussagen in der homologischen Algebra werden auf diese Weise bewiesen). Der Beweis des zweiten Teils geht analog; der dritte Teil ist eine direkte Folgerung aus den ersten beiden Teilen.

Zu 1. Es seien also f_B und f_D injektiv und f_A sei surjektiv. Sei $x \in C$ mit $f_C(x) = 0$. Dann ist $x = 0$, denn (Abbildung 5.2):

- Wegen $f_D \circ c(x) = c' \circ f_C(x) = c'(0) = 0$ und der Injektivität von f_D folgt $c(x) = 0$.
- Wegen $\operatorname{im} b = \ker c$ existiert ein $y \in B$ mit $b(y) = x$.
- Wegen $b' \circ f_B(y) = f_C \circ b(y) = f_C(x) = 0$ und $\operatorname{im} a' = \ker b'$ folgt: Es gibt ein $z' \in A'$ mit $a'(z') = f_B(y)$.
- Da f_A surjektiv ist, existiert ein $z \in A$ mit $f_A(z) = z'$.
- Dabei ist $a(z) = y$, denn: Es gilt $f_B\big(a(z)\big) = a' \circ f_A(z) = a'(z') = f_B(y)$ und f_B ist injektiv.
- Also ist (wegen $\operatorname{im} a \subset \ker b$)

$$x = b(y) = b \circ a(z) = 0,$$

wie gewünscht. □

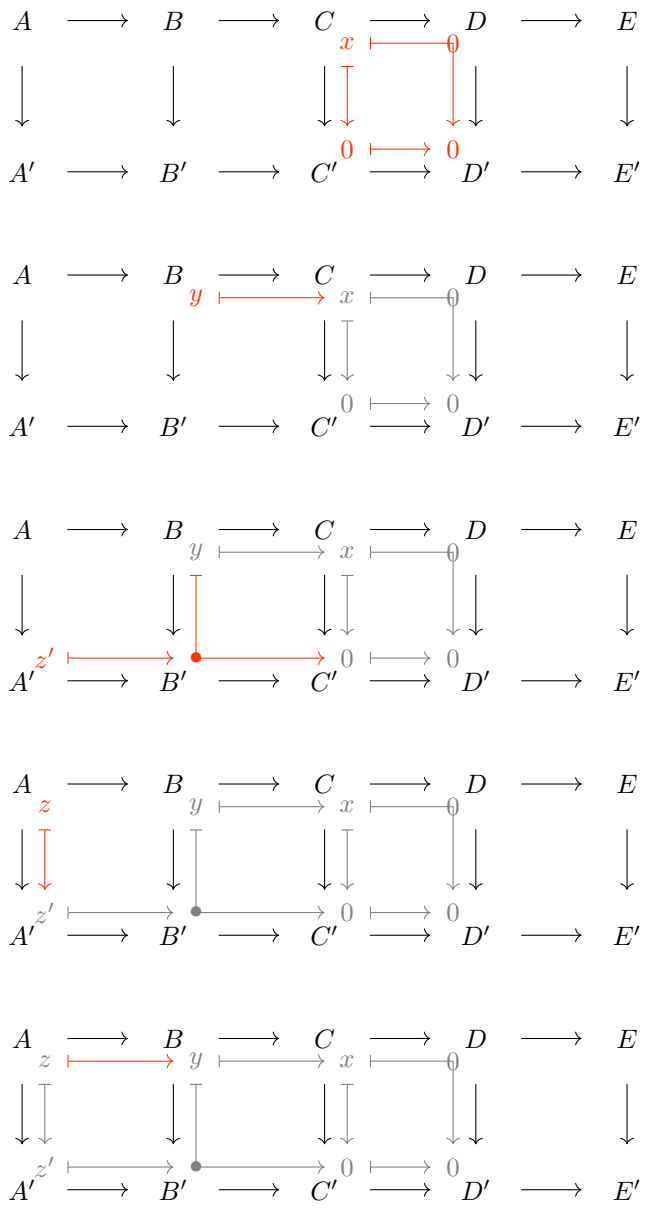


Abbildung 5.2.: Die Diagrammjagd aus dem Fünfer-Lemma

Proposition 5.1.17 (lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Ch}$ (d.h. die entsprechenden Sequenzen in jedem Grad sind exakt in ${}_R\mathsf{Mod}$). Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(A) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(p)} H_k(C) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Diese ist im folgenden Sinne natürlich: Ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[i']{} & B' & \xrightarrow[p']{} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit exakten Zeilen, so ist das zugehörige Leiterdiagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(A) & \xrightarrow{H_k(i)} & H_k(B) & \xrightarrow{H_k(p)} & H_k(C) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_A)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_B)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_C)} & & \downarrow{\scriptstyle H_{k-1}(f_A)} & & \\ \cdots & \xrightarrow[\partial_{k+1}]{} & H_k(A') & \xrightarrow[H_k(i')]{} & H_k(B') & \xrightarrow[H_k(p')]{} & H_k(C') & \xrightarrow[\partial_k]{} & H_{k-1}(A') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

kommutativ (mit exakten Zeilen).

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren den *Verbindungshomomorphismus*

$$\partial_k \colon H_k(C) \longrightarrow H_{k-1}(A)$$

wie folgt: Sei $\gamma \in H_k(C)$; sei $c \in C_k$ ein Zykel, der γ repräsentiert. Da $p_k \colon B_k \longrightarrow C_k$ surjektiv ist, existiert ein $b \in B_k$ mit

$$p_k(b) = c.$$

Da p eine Kettenabbildung ist, ist $p_{k-1} \circ \partial_k^B(b) = \partial_k^C \circ p_k(b) = \partial_k^C(c) = 0$; aufgrund der Exaktheit im Grad k existiert somit ein $a \in A_{k-1}$ mit

$$i_{k-1}(a) = \partial_k^B(b).$$

Wir nennen in dieser Situation (a, b, c) ein *kompatibles Tripel für* γ und definieren

$$\partial_k(\gamma) := [a] \in H_{k-1}(A).$$

Mit einfachen Diagrammjagden zeigt man nun (nachrechnen):

- Ist (a, b, c) ein kompatibles Tripel für γ, so ist $a \in A_{k-1}$ ein Zykel und repräsentiert somit tatsächlich eine Klasse in $H_{k-1}(A)$.

- Sind (a, b, c) und (a', b', c') kompatible Tripel für γ, so ist $[a] = [a']$ in $H_{k-1}(A)$.

Daran lässt sich leicht ablesen, dass ∂_k ein Homomorphismus ist und dass ∂_k natürlich ist (nachrechnen).

Weitere Diagrammjagden liefern, dass die entstehende lange Sequenz exakt ist (noch mehr nachrechnen ...). □

Wir können das Fünferlemma und die lange exakte Homologiesequenz wie folgt kombinieren:

Beispiel 5.1.18 (drie halen, twee betalen)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[i']{} & B' & \xrightarrow[p']{} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit exakten Zeilen. Dann gilt: Bestehen zwei der drei Folgen $(H_k(f_A))_{k\in\mathbb{N}}$, $(H_k(f_B))_{k\in\mathbb{N}}$, $(H_k(f_C))_{k\in\mathbb{N}}$ aus Isomorphismen, so auch die dritte, denn:

Die lange exakte Homologiesequenz für die beiden kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen liefert ein kommutatives Leiterdiagramm von exakten Sequenzen (Proposition 5.1.17). Wir können dann das Fünferlemma (Proposition 5.1.16) auf jeweils fünf aufeinanderfolgende Sprossen anwenden (wobei wir die Folge, von der wir nachweisen wollen, dass sie aus Isomorphismen bestehen, in die Mitte setzen).

5.2 Projektive Auflösungen

Eine wichtige Idee der homologischen Algebra ist, Moduln durch geeignete Kettenkomplexe aus „einfacheren“ Moduln zu ersetzen. Dies führt zu den projektiven Auflösungen. Projektive Moduln verhalten sich unter vielen Funktoren gutartig; zum Beispiel sind projektive Moduln flach. Durch solche Zerlegungen in projektive Bausteine werden manche Eigenschaften von Moduln erst sichtbar bzw. verständlich – manchmal sehen Moduln nämlich zunächst unkompliziert aus und erst bei der Zerlegung in projektive Moduln ist ersichtlich, dass es sich um einen Monstermodul handelt (Abbildung 5.3, Beispiel 5.3.14). Außerdem sind projektive Auflösungen fast eindeutig.

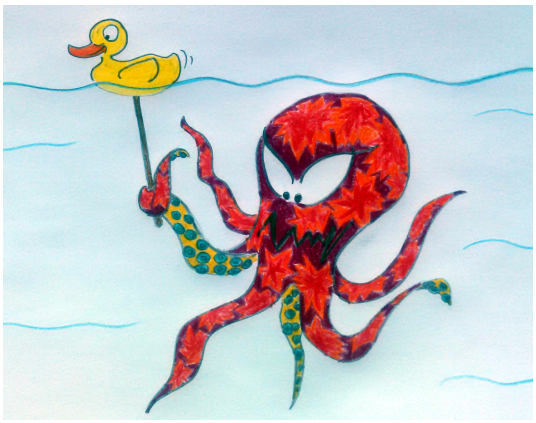


Abbildung 5.3.: Modul (Quietscheente) und eine projektive Auflösung (Oktopus), schematisch.

5.2.1 Projektive Moduln

Projektive Moduln sind eine Verallgemeinerung von freien Moduln:

Definition 5.2.1 (projektiver Modul)**.** Sei R ein ninoko Ring. Ein Modul $P \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ ist *projektiv*, wenn er die folgende Liftungseigenschaft besitzt: Für jeden Epimorphismus $\pi\colon B \longrightarrow C$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ und jeden R-Homomorphismus $\alpha\colon P \longrightarrow C$ gibt es einen R-Homomorphismus $\widetilde{\alpha}\colon P \longrightarrow B$ mit $\pi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow^{\widetilde{\alpha}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ B & \xrightarrow[\pi]{} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(Analog definieren wir projektive Rechtsmoduln.)

Beispiel 5.2.2 (projektive Moduln)**.**

- Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2$ ist *nicht* projektiv, denn das Liftungsproblem

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Z}/2 & & \\ & \swarrow^{?} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2}} & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[\text{Proj.}]{} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

  in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ besitzt *keine* Lösung.

- Jeder freie Modul ist projektiv, denn: Sei R ein ninoko Ring und sei F ein freier R-Modul, frei erzeugt von $S \subset F$. Sei $\pi\colon B \longrightarrow C$ ein Epimorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $\alpha\colon F \longrightarrow C$ ein R-Modulhomomorphismus. Ist $s \in S$, so gibt es (da π surjektiv ist) ein $b \in B$ mit $\pi(b) = \alpha(s)$. Wir definieren dann $\widetilde{\alpha}(s) := b$. Die universelle Eigenschaft des freien Moduls F zeigt, dass $\widetilde{\alpha}$ zu einem R-Modulhomomorphismus $F \longrightarrow B$ fortgesetzt werden kann. Nach Konstruktion gilt dabei $\pi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ (da diese Gleichung auf dem Erzeugendensystem S erfüllt ist).

Proposition 5.2.3 (Charakterisierung projektiver Moduln)**.** *Sei R ein ninoko Ring und $P \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul P ist projektiv.*
2. *Der R-Modul P ist ein direkter Summand in einem freien R-Modul.*
3. *Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ besitzt einen Rechtsspalt.*
4. *Der Funktor ${}_R\mathrm{Hom}(P, \,\cdot\,)\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ ist exakt.*

Die zweite (und in manchen Fällen auch die vierte) Eigenschaft sind gut geeignet, um nachzuweisen, dass ein gegebener Modul projektiv ist. Die anderen Eigenschaften sind nützlich, wenn man bereits weiß, dass ein projektiver Modul vorliegt.

Beweis. Zu 1. $\Longrightarrow$ 2. Sei P projektiv. Sei $S \subset P$ ein Erzeugendensystem von P, sei $F := \oplus_S R$ der frei von S erzeugte R-Modul und sei $\pi\colon F \longrightarrow P$ der zugehörige Epimorphismus. Wir wenden die Liftungseigenschaft von P auf die folgende Situation an:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_P} & & \\ F & \xrightarrow[\pi]{} & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Da P projektiv ist, gibt es einen R-Modulhomomorphismus $\sigma\colon P \longrightarrow F$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_P$. Dann sind

$$\begin{aligned} F &\longleftrightarrow \ker \pi \oplus P \\ x &\longmapsto \big(x - \sigma \circ \pi(x), \pi(x)\big) \\ x + \sigma(y) &\longmapsfrom (x, y) \end{aligned}$$

zueinander inverse Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$ (nachrechnen).

Zu 2. $\Longrightarrow$ 3. Sei P ein direkter Summand in einem freien R-Modul F, d.h. es gibt R-Modulhomomorphismen $\pi\colon F \longrightarrow P$ (Projektion auf den Summanden P) und $\sigma\colon P \longrightarrow F$ (Inklusion von P als direkter Summand) mit

$$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_P \,.$$

Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$. Da F frei und p surjektiv ist, gibt es einen R-Homomorphismus $s\colon F \longrightarrow B$ mit $p \circ s = \pi$. Dann ist $s \circ \sigma$ ein Spalt von p, denn

$$p \circ (s \circ \sigma) = (p \circ s) \circ \sigma = \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_P \,.$$

Zu 3. $\Longrightarrow$ 1. Es gelte die dritte Bedingung. Aus einem Erzeugendensystem von P erhalten wir einen freien R-Modul F und einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $\pi\colon F \longrightarrow P$. Wenden wir die dritte Bedingung auf

$$0 \longrightarrow \ker \pi \xrightarrow{\text{Inkl.}} F \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

an, so erhalten wir einen R-Modulhomomorphismus $\sigma\colon P \longrightarrow F$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_P$. Mithilfe von σ und π können wir Liftungsprobleme für P in Liftungsprobleme für den freien Modul F übersetzen. Da F projektiv ist (Beispiel 5.2.2), folgt somit, dass auch die Liftungsprobleme für P lösbar sind (nachrechnen). Also ist P projektiv.

Zu 4. Man kann die Exaktheitsbedingung für ${}_R\mathrm{Hom}(P, \cdot\,)$ zum Beispiel gut mit der dritten Bedingung vergleichen (Übungsaufgabe). □

Beispiel 5.2.4 (projektive Moduln vs. Freiheit)**.**

- Im allgemeinen ist *nicht* jeder projektive Modul frei, denn: Sei M der Modul aus Beispiel 3.4.12 über dem Ring $C(S^1, \mathbb{R})$ (Möbiusband!) oder der Modul aus Caveat 3.4.9 über dem Ring $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$. Nach Konstruktion sind diese Moduln *nicht* frei aber direkte Summanden in freien Moduln (und daher projektiv).

- Ist R ein lokaler Ring und ist P ein *endlich erzeugter* projektiver R-Modul, so ist P bereits frei, denn: Da P endlich erzeugt und projektiv ist, zeigt der Beweis von Proposition 5.2.3, dass P ein direkter Summand in einem endlich erzeugten freien R-Modul ist. Mit Lemma 3.4.11 folgt daher, dass P ein freier R-Modul ist.

- Ist R ein (kommutativer!) Ring und P ein *endlich erzeugter* projektiver Modul, so ist P lokal frei, denn: Mit der Charakterisierung projektiver Moduln als direkte Summanden in freien Moduln (Proposition 5.2.3) folgt, dass die lokalisierten Moduln projektiv sind; daher ist das vorige Argument anwendbar.

  Alternativ kann man dies wie im lokalen Fall auf Proposition 3.4.10 zurückführen.

Korollar 5.2.5 (projektive Moduln sind flach)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei P ein projektiver R-Rechtsmodul. Dann ist P* flach*, d.h. der Funktor*

$$P \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$$

ist exakt.

Für kommutative Ringe liefert dies denselben Flachheitsbegriff wie in Definition 3.2.15; im nicht-kommutativen Fall haben die Tensorprodukte zwar im allgemeinen nur noch eine $\mathbb{Z}$-Modulstruktur, was aber den Exaktheitsbegriff nicht beeinflusst.

Beweis. Da P projektiv ist, gibt es einen R-Rechtsmodul Q und einen freien R-Rechtsmodul F mit $P \oplus Q \cong_R F$ (Rechtsmodulversion von Proposition 5.2.3). Wir verwenden nun die folgenden Tatsachen:

- Freie Moduln sind flach (folgt auch im nicht-kommutativen Fall wie in Beispiel 3.2.16); also ist $F \otimes_R \cdot$ ein exakter Funktor.
- Die (gradweise) direkte Summe von Kettenkomplexen ist genau dann exakt, wenn die einzelnen Kettenkomplexe exakt sind (nachrechnen).

Wegen $P \oplus_R Q \cong_R F$ und der Verträglichkeit des Tensorprodukts mit direkten Summen folgt somit, dass der Funktor $P \otimes_R \cdot$ exakt ist.

Alternativ kann man die dritte Eigenschaft aus Proposition 5.2.3 und Lemma 3.4.7 verwenden. □

5.2.2 Projektive Auflösungen

Wir zerlegen Moduln in Komplexe projektiver Bausteine; dies ist eine Verallgemeinerung von Präsentationen von Moduln durch Erzeuger und Relationen.

Definition 5.2.6 (projektive Auflösung)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei $M \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Eine *projektive Auflösung von* M ist ein Paar (P, ε), wobei

- $P = (P_*, \partial_*)$ ein Kettenkomplex von R-Linksmoduln ist,
- für jedes $n \in \mathbb{N}$ der R-Linksmodul P_n projektiv ist,
- ε ein R-Modulhomomorphismus $P_0 \longrightarrow M$ ist, und
- die zusammengesetzte Sequenz $P \,\square\, \varepsilon$ exakt ist:

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

Beispiel 5.2.7 (projektive Auflösungen)**.**

- Zum Beispiel ist

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  eine projektive Auflösung des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$.

- Es ist
$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Proj.}} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$
eine projektive Auflösung des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/2$.

- Sei $R := \mathbb{Z}[T]/(T^2-1)$; wir fassen $\mathbb{Z}$ als R-Modul auf (indem wir $[T]$ als Identität auf $\mathbb{Z}$ operieren lassen). Dann ist
$$\cdots \longrightarrow R \xrightarrow{[1]\mapsto[1-T]} R \xrightarrow{[1]\mapsto[1+T]} R \xrightarrow{[1]\mapsto[1-T]} R \xrightarrow{[1]\mapsto 1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
eine projektive Auflösung des R-Moduls $\mathbb{Z}$ (nachrechnen).

Proposition 5.2.8 (simpliziale Auflösungen)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei X eine nicht-leere Menge. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei*
$$S_n(X) := \bigoplus_{X^{n+1}} R$$
und zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei
$$\begin{aligned} \partial_n \colon S_n(X) &\longrightarrow S_{n-1}(X) \\ [x_0,\dots,x_n] &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \cdot [x_0,\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n]. \end{aligned}$$
Dabei verwenden wir die folgende Notation: Ist $x = (x_0,\dots,x_n) \in X^{n+1}$, so schreiben wir $[x_0,\dots,x_n]$ für den Basisvektor von $S_n(X)$ zu x; ist $j \in \{0,\dots,n\}$, so schreiben wi
$$[x_0,\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n] := [x_0,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n] \in S_{n-1}(X)$$
für den Basisvektor von $S_{n-1}(X)$ zu dem Tupel, das aus x durch Streichen der Komponente mit Index j entsteht. Außerdem sei.
$$\begin{aligned} \varepsilon \colon S_0(X) &\longrightarrow R \\ [x] &\longmapsto 1. \end{aligned}$$
Dann ist $(S(X),\varepsilon)$ eine projektive Auflösung von R, die simpliziale Auflösung von R zu X.

Bemerkung 5.2.9 (Anschauung der simplizialen Auflösung)**.** Die Konstruktion in Proposition 5.2.8 beruht auf der folgenden Anschauung: Ist zum Beispiel $(x_0,x_1,x_2) \in X^{2+1}$, so stellt man sich dazu das Dreieck $[x_0,x_1,x_2]$ (zweidimensionale Simplex) aus Abbildung 5.4 mit den Ecken x_0,x_1,x_2 vor. Der Rand dieses Simplexes ergibt sich dann wie in Beispiel 5.1.3 zu
$$\partial_2[x_0,x_1,x_2] = [x_1,x_2] - [x_0,x_2] + [x_0,x_1].$$

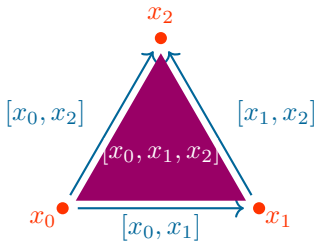


Abbildung 5.4.: Anschauung zur simplizialen Auflösung

Beweis von Proposition 5.2.8. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $S_n(X) = \bigoplus_{X^{n+1}} R$ ein freier R-Modul, und damit insbesondere projektiv (Beispiel 5.2.2).

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, denn: Es genügt, dies auf der Basis X^{n+1} von $S_n(X)$ nachzuweisen. Seien $(x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n [x_0, \dots, x_n] &= \partial_{n-1} \Bigg(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot [x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n] \Bigg) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \partial_{n-1} [x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n] \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \Bigg(\sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \cdot [x_0, \dots, \widehat{x_k}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n] \\
&\qquad + \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \cdot [x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, \widehat{x_{k+1}}, \dots, x_n] \Bigg) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j+k} \cdot [x_0, \dots, \widehat{x_k}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n] \\
&+ \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{j+k-1} \cdot [x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n].
\end{aligned}$$

Diese beiden Summen enthalten dieselben Terme, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Also ist $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Außerdem gilt $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, denn für alle $(x_0, x_1) \in X^2$ ist

$$\varepsilon \circ \partial_1 [x_0, x_1] = \varepsilon\big([x_1] - [x_0]\big) = 1 - 1 = 0.$$

Zur Exaktheit: Wegen $X \neq \emptyset$ gibt es ein Element $z \in X$. Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den „Kegeloperator“ (der jeden Simplex mit der Kegelspitze 0 zu einem höherdimensionalen Simplex erweitert)

$$\begin{aligned} s_n \colon S_n(M) &\longrightarrow S_{n+1}(M) \\ [x_0, \ldots, x_n] &\longmapsto [z, x_0, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \quad \partial_n \circ s_{n-1} = \mathrm{id}_{S_{n-1}(M)} + s_{n-2} \circ \partial_{n-1}$$

(nachrechnen).

Ist $c \in \ker \partial_{n-1}$, so ist daher

$$\partial_n\big(s_{n-1}(c)\big) = c + s_{n-2} \circ \partial_{n-1}(c) = c + 0 = c,$$

und damit $c \in \operatorname{im} \partial_n$. Außerdem gilt: Ist $c = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot [x_j] \in \ker \varepsilon$, so ist

$$\partial_1\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot [z, x_j]\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot [x_j] + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot [z] = c + 0 \cdot [z] = c,$$

und damit $c \in \operatorname{im} \partial_1$. □

Der Nutzen dieser zunächst unnötig groß und kompliziert wirkenden projektiven Auflösung liegt nicht in der Auflösung selbst, sondern in der unterliegenden Idee. Simpliziale Methoden führen zu vielen interessanten Auflösungen (zum Beispiel in der Gruppenkohomologie) [13, Kapitel 8].

Jeder Modul besitzt eine projektive (sogar freie) Auflösung. Zum Beispiel kann man wie folgt vorgehen: Sei R ein ninoko Ring und M ein R-Linksmodul.

- Man wählt ein Erzeugendensystem von M und betrachtet den kanonischen surjektiven R-Modulhomomorphismus ε des zugehörigen freien Moduls auf M.
- Im nächsten Schritt wählt man ein Erzeugendensystem von $\ker \varepsilon$ und betrachtet den kanonischen surjektiven R-Modulhomomorphismus des zugehörigen freien Moduls auf $\ker \varepsilon$.
- ...

Wir betrachten nun eine systematische, funktorielle, Variante dieser Konstruktion:

Proposition 5.2.10 (eine funktorielle Auflösung)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei $F \colon \mathsf{Set} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ der freie Erzeugungsfunktor (vgl. Beispiel 1.2.5). Ist M ein R-Linksmodul, so schreiben wir*

$$\begin{aligned} \varepsilon_M \colon F(M) = \bigoplus_M R &\longrightarrow M \\ e_x &\longmapsto x \end{aligned}$$

für den zugehörigen surjektiven R-Modulhomomorphismus. Wir definieren

$$C_0(M) := F(M) \quad \textit{und} \quad \partial_0 := \varepsilon_M$$

und induktiv

$$\begin{aligned} C_{n+1}(M) &:= F(\ker \partial_n) \\ \partial_{n+1} &:= \varepsilon_{\ker \partial_n} \colon C_{n+1}(M) = F(\ker \partial_n) \longrightarrow \ker \partial_n \subset C_n(M) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. *Dann ist* $\big(C(M), \varepsilon_M\big)$ *eine projektive (sogar freie) Auflösung von* M *in* ${}_R\mathsf{Mod}$.
2. *Diese Konstruktion ist funktoriell (bildet also einen Funktor von* ${}_R\mathsf{Mod}$ *in die Kategorie der* $\mathbb{N} \cup \{-1\}$*-indizierten Kettenkomplexe über* ${}_R\mathsf{Mod}$*).*

Beweis. Zu 1. Nach Konstruktion ist $C_n(M)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein freier R-Modul und ε_M ist surjektiv. Induktiv wird außerdem sichergestellt, dass $(C_*(M), \partial_*)$ ein Kettenkomplex und $C(M) \circ \varepsilon_M$ exakt ist.

Zu 2. Ist $f \colon M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von R-Linksmoduln, so gilt (nachrechnen)

$$\varepsilon_N \circ F(f) = f \circ \varepsilon_M.$$

Wir definieren nun $f_0 := F(f) \colon C_0(M) \longrightarrow C_0(M)$ und induktiv

$$f_{n+1} := F(f_n|_{\ker \partial_n}) \colon C_{n+1}(M) \longrightarrow C_{n+1}(N)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f_* \circ f \colon C(M) \circ \varepsilon_M \longrightarrow C(N) \circ \varepsilon_N$ eine Kettenabbildung (nachrechnen). Da F ein Funktor ist, ist diese Konstruktion funktoriell. □

Die obige funktorielle Auflösung hat den Nachteil, dass sie sehr „groß“ ist; sie hat jedoch den Vorteil, dass sie funktoriell ist.

Beispiel 5.2.11 (Syzygy)**.** Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es eine projektive Auflösung (P, ε) von M, bei der für jedes $n \in \mathbb{N}$ der R-Modul P_n endlich erzeugt ist (Übungsaufgabe).

5.2.3 Der Fundamentalsatz der homologischen Algebra

Wir zeigen nun, dass projektive Auflösungen im wesentlichen eindeutig bestimmt sind; dies geht bei vielen Konstruktionen in der homologischen Algebra ein.

Satz 5.2.12 (Fundamentalsatz der homologischen Algebra)**.** *Sei* R *ein ninoko Ring, seien* M, N *Linksmoduln über* R *und sei* $f \colon M \longrightarrow N$ *ein* R*-Modulhomomorphismus. Sei* (P, ε) *eine projektive* R*-Auflösung von* M *und sei* $C \circ (\gamma \colon C_0 \twoheadrightarrow N)$ *eine exakte Sequenz in* ${}_R\mathsf{Mod}$*. Dann kann* $f \colon M \longrightarrow N$ *zu einer Kettenabbildung* $\widetilde{f} \circ f \colon P \circ \varepsilon \longrightarrow C \circ \gamma$ *fortgesetzt werden und die Kettenabbildung* $\widetilde{f} \colon P \longrightarrow C$ *ist bis auf* R*-Kettenhomotopie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Existenz. Wir konstruieren induktiv eine R-Kettenabbildung $\widetilde{f} \,\square\, f \colon P \,\square\, \varepsilon \longrightarrow C \,\square\, \gamma$: Wir bezeichnen die Randoperatoren von P mit ∂_n^P und die von C mit ∂_n^C; ausnahmsweise verwenden wir außerdem die Konvention $\partial_0^P := \varepsilon$, $\partial_0^C := \gamma$ und $\widetilde{f}_{-1} := f$.

- *Induktionsanfang.* Da $\gamma \colon C_0 \longrightarrow N$ surjektiv ist und P_0 projektiv ist, gibt es einen R-Homomorphismus $\widetilde{f}_0 \colon P_0 \longrightarrow C_0$ mit $\gamma \circ \widetilde{f}_0 = f \circ \varepsilon$:

$$\begin{array}{ccccc} P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \widetilde{f}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ C_0 & \xrightarrow[\gamma]{} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- *Induktionsschritt.* Sei $n \in \mathbb{N}$ und eine Fortsetzung $\widetilde{f} \colon P \longrightarrow C$ sei bereits bis Grad n als R-Kettenabbildung konstruiert. Wir konstruieren nun einen R-Homomorphismus $\widetilde{f}_{n+1} \colon P_{n+1} \longrightarrow C_{n+1}$ mit $\partial_{n+1}^C \circ \widetilde{f}_{n+1} = \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1}^P$: Da $C \,\square\, \gamma$ exakt ist und nach Induktionsvoraussetzung

$$\partial_n^C \circ \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1}^P = \widetilde{f}_{n-1} \circ \partial_n^P \circ \partial_{n+1}^P = 0$$

gilt, folgt $\operatorname{im} \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1}^P \subset \ker \partial_n^C = \operatorname{im} \partial_{n+1}^C$. Da P_{n+1} projektiv ist, gibt es also einen R-Homomorphismus $\widetilde{f}_{n+1} \colon P_{n+1} \longrightarrow C_{n+1}$ mit $\partial_{n+1}^C \circ \widetilde{f}_{n+1} = \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1}^P$:

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^P} & \operatorname{im} \partial_{n+1}^P & & \\ {\scriptstyle \widetilde{f}_{n+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_n|_{\operatorname{im} \partial_{n+1}^P}} & & \\ C_{n+1} & \xrightarrow[\partial_{n+1}^C]{} & \operatorname{im} \partial_{n+1}^C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Damit ist die Existenz gezeigt.

Eindeutigkeit bis auf Kettenhomotopie. Die Eindeutigkeit folgt mit einer analogen induktiven Konstruktion (nachrechnen). □

Korollar 5.2.13 (Eindeutigkeit projektiver Auflösungen)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei $M \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann gibt es bis auf R-Kettenhomotopieäquivalenz genau eine projektive R-Auflösung von M.*

Beweis. Die Existenz einer projektiven Auflösung erhalten wir aus Proposition 5.2.10. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Fundamentalsatz der homologischen Algebra (Satz 5.2.12), angewendet auf $\mathrm{id}_M \colon M \longrightarrow M$, mit dem klassischen Eindeutigkeitsargument bei universellen Eigenschaften:

Seien (P, ε) und (P', ε') projektive Auflösungen von M. Nach dem Fundamentalsatz (Satz 5.2.12) kann id_M zu R-Kettenabbildungen

$$\widetilde{f} \boxdot \mathrm{id}_M \colon P \boxdot \varepsilon \longrightarrow P' \boxdot \varepsilon'$$
$$\widetilde{g} \boxdot \mathrm{id}_M \colon P' \boxdot \varepsilon' \longrightarrow P \boxdot \varepsilon$$

fortgesetzt werden. Dann gilt nach der Eindeutigkeitsaussage des Fundamentalsatzes, dass

$$(\widetilde{f} \boxdot \mathrm{id}_M) \circ (\widetilde{g} \boxdot \mathrm{id}_M) = (\widetilde{f} \circ \widetilde{g}) \boxdot \mathrm{id}_M \simeq_R \mathrm{id}_P \boxdot \mathrm{id}_M$$

Analog folgt $(\widetilde{g} \boxdot \mathrm{id}_M) \circ (\widetilde{f} \boxdot \mathrm{id}_M) \simeq_R \mathrm{id}_P \boxdot \mathrm{id}_M$, und damit die Behauptung. □

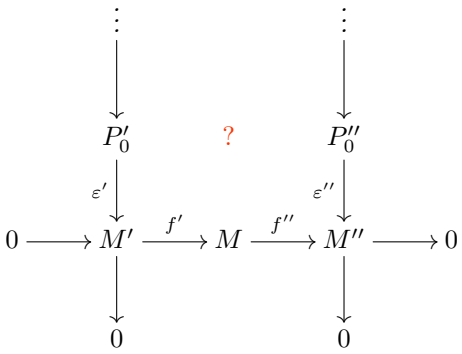
Caveat 5.2.14. Die Eindeutigkeit projektiver Auflösungen gilt nur bis auf Kettenhomotopieäquivalenz bzw. kanonischen Isomorphismus in der Homotopiekategorie. Verschiedene projektive Auflösungen zu einem gegebenen Modul können jedoch sehr verschiedene Tugenden haben (zum Beispiel Funktorialität vs. Übersichtlichkeit). Die Kunst besteht darin, für jede Anwendung die „richtige“ projektive Auflösung auszuwählen. Oft helfen dabei geometrische Methoden.

Außerdem ist es möglich, für kurze exakte Sequenzen von R-Moduln kompatible projektive Auflösungen zu konstruieren:

Proposition 5.2.15 (Hufeisenlemma)**.** *Sei R ein ninoko Ring. Sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f''} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ und seien $P' \boxdot \varepsilon'$ bzw. $P'' \boxdot \varepsilon''$ projektive R-Auflösungen von M' bzw. M'':



Dann gibt es eine projektive R-Auflösung $P \boxdot \varepsilon$ von M und R-Kettenabbildungen $\widetilde{f'} \boxdot f' \colon P' \boxdot \varepsilon' \longrightarrow P \boxdot \varepsilon$ bzw. $\widetilde{f''} \boxdot f'' \colon P \boxdot \varepsilon \longrightarrow P'' \boxdot \varepsilon''$, so dass

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\widetilde{f'_n}} P_n \xrightarrow{\widetilde{f''_n}} P''_n \longrightarrow 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ exakt ist.

Beweis. Man definiert $P \boxdot \varepsilon$ auf Modulebene als direkte Summe der äußeren Auflösungen und wählt für $\widetilde{f}'$ bzw. $\widetilde{f}''$ die entsprechende Inklusion bzw. Projektion. Die Randoperatoren konstruieren wir wie folgt:

Da P_0'' projektiv und $f'' \colon M \longrightarrow M''$ surjektiv ist, gibt es einen R-Modulhomomorphismus $\widetilde{\varepsilon}'' \colon P_0'' \longrightarrow M$ mit

$$f'' \circ \widetilde{\varepsilon}'' = \varepsilon''.$$

Wir setzen dann

$$\varepsilon := (f' \circ \varepsilon') \oplus \widetilde{\varepsilon}'' \colon P_0 = P_0' \oplus P_0'' \longrightarrow M$$

und konstruieren induktiv mithilfe der Projektivität der P_n'' Randoperatoren $\partial_{n+1} \colon P_{n+1} \longrightarrow P_n$, die mit den Randoperatoren auf P' bzw. P'' verträglich sind:

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei ∂_n bereits induktiv auf diese Weise konstruiert. Eine Diagrammjagd zeigt dann, dass

$$f_n''(\ker \partial_n) = \ker \partial_n'' = \operatorname{im} \partial_{n+1}''$$

gilt (nachrechnen). Da P_{n+1}'' projektiv ist, gibt es somit einen R-Homomorphismus $\widetilde{\partial}_{n+1}'' \colon P_{n+1}'' \longrightarrow \ker \partial_n$ mit

$$f'' \circ \widetilde{\partial}_{n+1}'' = \partial_{n+1}''.$$

Wir definieren dann

$$\partial_{n+1} := (f' \circ \partial_{n+1}') \oplus \widetilde{\partial}_{n+1}'';$$

eine Diagrammjagd zeigt, dass $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ (nachrechnen).

Auf diese Weise erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P' \boxdot \varepsilon' \xrightarrow{\widetilde{f}' \boxdot f'} P \boxdot \varepsilon \xrightarrow{\widetilde{f}'' \boxdot f''} P'' \boxdot \varepsilon'' \longrightarrow 0$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ (indiziert über $\mathbb{N} \cup \{-1\}$). Mit der langen exakten Homologiesequenz (Proposition 5.1.17) folgt, dass $P \boxdot \varepsilon$ exakt ist. Also ist $P \boxdot \varepsilon$ eine projektive Auflösung von M mit den geforderten Eigenschaften. □

5.3 Tor

Wir wissen bereits, dass Tensorproduktfunktoren im allgemeinen *nicht* exakt sind. Wir zeigen nun, wie man diese Nicht-Exaktheit mithilfe geeigneter Fehlertermfunktoren genauer beschreiben kann. Dies führt zu den Tor-Funktoren

(der Name geht darauf zurück, dass diese Funktoren in Spezialfällen etwas mit Torsion zu tun haben; Beispiel 5.3.4).

Allgemeiner kann man diese Konstruktion abgeleiteter Funktoren für alle einseitig exakten Funktoren durchführen (zum Beispiel erhält man so aus den Hom-Funktoren die sogenannten Ext-Funktoren). Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden nur auf das abgeleitete Tensorprodukt.

5.3.1 Axiomatische Beschreibung

Wir beginnen mit einer axiomatischen Beschreibung von Tor; wir werden dann zeigen, wie man mit dieser Beschreibung erste Beispiele berechnen kann und wie man Eindeutigkeit und Existenz solcher Funktoren beweist.

Definition 5.3.1 (Ableitung des Tensorproduktfunktors)**.** Sei R ein ninoko Ring und es sei M ein R-Rechtsmodul. Eine *Ableitung des Tensorproduktfunktors* $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ besteht aus einer Folge $\big(\mathrm{Tor}_n^R(M, \cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktoren ${}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ und einer Familie

$$\big(\partial_{n+1}\colon \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N'') \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M, N')\big)_{n\in\mathbb{N},\ 0\to N'\to N\to N''\to 0 \text{ exakt}}$$

von Morphismen (den sogenannten *Verbindungshomomorphismen*) mit folgenden Eigenschaften:

- Der Funktor $\mathrm{Tor}_0^R(M, \cdot)$ ist zu $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph.
- Ist $P \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ projektiv, so gilt
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \quad \mathrm{Tor}_n^R(M, P) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}.$$
- Ist $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$, so ist die induzierte Sequenz
$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,f)} \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,g)} \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(M, N') \longrightarrow \cdots$$
exakt (und natürlich, in der gegebenen kurzen exakten Sequenz).

Die dritte und die erste Eigenschaft liefern dabei die gewünschte Erweiterung der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts zu einer (langen) exakten Tor-Sequenz.

Satz 5.3.2 (Ableitung des Tensorprodukts)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Dann gibt es bis auf natürliche Isomorphie genau eine Ableitung des Tensorprodukts $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$.*

Bevor wir den Satz beweisen, geben wir erste Beispiele dafür, wie man mit den Eigenschaften der Tor-Funktoren arbeiten kann:

Proposition 5.3.3 (dimension shifting)**.** *Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul, sei N ein R-Linksmodul und sei*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ i\ } P \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit einem projektiven R-Modul P. Dann folgt für jede Ableitung von $M \otimes_R \cdot$ und alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, dass

$$\operatorname{Tor}^R_{n+1}(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}^R_n(M,K)$$

und

$$\operatorname{Tor}^R_1(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} \ker\bigl(M \otimes_R i \colon M \otimes_R K \to M \otimes_R P\bigr).$$

Beweis. Die gegebene kurze exakte Sequenz liefert eine lange exakte Tor-Sequenz. Da P projektiv ist, sind die Terme $\operatorname{Tor}^R_n(M,P)$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ dieser Sequenz trivial. Somit erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}^R_{n+1}(M,N) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \operatorname{Tor}^R_n(M,K) \longrightarrow 0,$$

und damit $\operatorname{Tor}^R_{n+1}(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}^R_n(M,K)$. Analog erhält man die Behauptung für $\operatorname{Tor}^R_1(M,N)$ aus der Tatsache, dass $\operatorname{Tor}^R_0(M,\,\cdot\,) \cong M \otimes_R \cdot$. □

Beispiel 5.3.4 (Tor als Torsion)**.** Seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Für jede Ableitung von $M \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ gilt dann

$$\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M, \mathbb{Z}/n) \cong_{\mathbb{Z}} \{x \in M \mid n \cdot x = 0\},$$

denn: Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ n\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Proj.}} \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$. Mit dimension shifting (Proposition 5.3.3) erhalten wir somit

$$\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M, \mathbb{Z}/n) \cong_{\mathbb{Z}} \ker(n \colon M \to M).$$

In diesem Fall beschreibt also der Tor-Term tatsächlich einen Torsionsuntermodul (nämlich n-Torsion in M).

Für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ folgt zum Beispiel (nachrechnen)

$$\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \cong_{\mathbb{Z}} \ker(n \colon \mathbb{Z}/m \to \mathbb{Z}/m) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(m,n).$$

Beweisskizze der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.3.2. Sei (T_*, ∂_*) eine Ableitung von $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$. Insbesondere ist dann T_0 bis auf natürliche Isomorphie vorgegeben (nämlich als $M \otimes_R \cdot$).

Mithilfe von dimension shifting (Proposition 5.3.3) folgt daher induktiv: Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist der Funktor $T_n \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt. Ist nämlich N ein R-Linksmodul, so betrachten wir den freien R-Modul $F := \bigoplus_N R$ und den kanonischen Epimorphismus $\pi \colon F \longrightarrow N$. Dimension shifting liefert dann

$$T_n(N) \cong_{\mathbb{Z}} T_{n-1}(\ker \pi).$$

Diese Isomorphismen sind sogar natürlich und kanonisch, sobald man einen natürlichen Isomorphismus $T_0 \Longrightarrow M \otimes_R \cdot$ gewählt hat (nachrechnen).

Geht man sorgfältig durch dieses Induktionsargument, so erkennt man auch, dass diese Argumente mit den Verbindungshomomorphismen verträglich sind und diese daher auch (bis auf „natürliche Isomorphie“) eindeutig bestimmt sind (nachrechnen; aufwendig!). □

Aus dimension shifting ist auch ersichtlich, dass man Tor-Funktoren durch projektive Auflösungen konstruieren kann. Dies werden wir im folgenden Abschnitt systematisch durchführen.

5.3.2 Konstruktion

Wir beginnen unsere Konstruktion der Ableitung des Tensorprodukts mit den Tor-Funktoren:

Definition 5.3.5 (Tor)**.** Sei R ein ninoko Ring, sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir den Funktor $\mathrm{Tor}_n^R(M, \cdot)$ als die Komposition

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, \cdot) := H_n \circ (M \otimes_R \cdot) \circ C \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}\,.$$

Dabei bezeichnet

- C den Funktor ${}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$ der funktoriellen Auflösung aus Proposition 5.2.10,
- $M \otimes_R \cdot$ den gradweisen Tensorproduktfunktor ${}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ durch Tensorieren (der Kettenmoduln und der Randoperatoren) mit M (Übungsaufgabe),
- H_n den n-ten Homologiefunktor ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$.

Im folgenden werden wir Tor immer als Notation für die in Definition 5.3.5 definierten Funktoren verwenden.

Lemma 5.3.6 (Grad 0)**.** *Sei R ein ninoko Ring und sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Dann ist $\mathrm{Tor}_0^R(M, \cdot)$ natürlich isomorph zu $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$.*

Beweis. Sei $N \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und sei $\varepsilon_N \colon C_0(N) \longrightarrow N$ die Augmentierungsabbildung der funktoriellen Auflösung von N. Da ε_N surjektiv und $M \otimes_R \cdot$ rechtsexakt ist, folgt

$$\begin{aligned}
M \otimes_R N &\cong_{\mathbb{Z}} M \otimes_R \big(C_0(N)/\ker \varepsilon_N\big) && \text{(da } \varepsilon_N \text{ surjektiv ist)}\\
&\cong_{\mathbb{Z}} M \otimes_R \big(C_0(N)/\operatorname{im} \partial_1\big) && \text{(da } C(N) \square \varepsilon_N \text{ exakt ist)}\\
&\cong_{\mathbb{Z}} \frac{M \otimes_R C_0(N)}{\operatorname{im}(M \otimes_R \partial_1)} && \text{(Rechtsexaktheit von } M \otimes_R \cdot \text{)}\\
&= H_0\big(M \otimes_R C(N)\big) && \text{(Definition von } H_0\text{)}\\
&= \mathrm{Tor}_0^R(M,N) && \text{(Definition 5.3.5).}
\end{aligned}$$

Da all diese Isomorphismen natürlich sind (nachrechnen), erhalten wir den gewünschten natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Tor}_0^R(M, \cdot\,) \cong M \otimes_R \cdot$. □

Lemma 5.3.7 (das Tor-Rezept)**.** *Sei R ein ninoko Ring, sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, sei $N \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und sei (P, ε) eine projektive Auflösung von N in ${}_R\mathsf{Mod}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(M \otimes_R P).$$

Beweis. Aus dem Fundamentalsatz der homologischen Algebra (Satz 5.2.12) erhalten wir eine (bis auf Kettenhomotopie kanonische) Kettenhomotopieäquivalenz $f \colon C(N) \longrightarrow P$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ (als Fortsetzung der Identität von N).

Dann ist auch $M \otimes_R f \colon M \otimes_R C(N) \longrightarrow M \otimes_R P$ eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ (Übungsaufgabe).

Insbesondere induziert diese für alle $n \in \mathbb{N}$ einen (kanonischen) Isomorphismus (Proposition 5.1.14)

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) = H_n\big(M \otimes C(N)\big) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(M \otimes_R P). \qquad \square$$

Lemma 5.3.8 (Konstruktion der Verbindungshomomorphismen)**.** *Sei R ein ninoko Ring, sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ und sei*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\ f\ } N \xrightarrow{\ g\ } N'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$. Dann gibt es eine (natürliche) lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N') \xrightarrow{\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,f)} \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,g)} \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N'') \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(M,N') \longrightarrow \cdots$$

Beweis. Wir wenden das Hufeisenlemma 5.2.15 auf die projektiven Auflösungen $C(N')$ und $C(N'')$ an; daraus erhalten wir eine mit diesen Auflösungen kompatible projektive Auflösung (P, ε) von N und damit insbesondere eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C(N') \xrightarrow{\widetilde{f}} P \xrightarrow{\widetilde{g}} C(N'') \longrightarrow 0$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$, die mit der gegebenen Sequenz verträglich ist. Da die Kettenmoduln in $C(N'')$ alle projektiv sind, spaltet diese Sequenz in jedem Grad (Proposition 5.2.3). Somit ist auch die tensorierte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \otimes_R C(N') \xrightarrow{M\otimes_R \widetilde{f}} M \otimes_R P \xrightarrow{M\otimes_R \widetilde{g}} M \otimes_R C(N'') \longrightarrow 0$$

gradweise exakt (Übungsaufgabe). Diese kurze exakte Sequenz in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ liefert eine lange exakte Homologiesequenz (Proposition 5.1.17). Mit Lemma 5.3.7 können wir in dieser die Terme der Form $H_n(M \otimes_R P)$ durch $\operatorname{Tor}_n^R(M,N)$ ersetzen (dies liefert auch die korrekten Homomorphismen in der langen Sequenz; nachrechnen).

Die entstehenden Verbindungshomomorphismen sind dabei unabhängig von der gewählten projektiven Auflösung (P,ε) (nachrechnen; dabei verwendet man exzessiv die Eindeutigkeitsaussage bis auf Homotopie aus dem Fundamentalsatz der homologischen Algebra (Satz 5.2.12)).

Die Natürlichkeit ergibt sich dabei daraus, dass jeder der involvierten Schritte auf Homologie natürlich ist (nachrechnen). □

Beweis der Existenzaussage aus Satz 5.3.2. Wir verwenden die Konstruktion von Tor aus Definition 5.3.5 und wählen für jede kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ Verbindungshomomorphismen wie in Lemma 5.3.8. Dann sind die Eigenschaften aus Definition 5.3.1 erfüllt, denn:

- Wir haben $\operatorname{Tor}_0^R(M,\,\cdot\,)$ bereits in Lemma 5.3.6 bestimmt.
- Ist $P \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ projektiv, so ist

  $$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\mathrm{id}_P} P$$

  eine projektive Auflösung von P in ${}_R\mathsf{Mod}$. Mit Lemma 5.3.7 erhalten wir somit

  $$\operatorname{Tor}_n^R(M,P) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(M \otimes_R (\cdots \to 0 \to P) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
- Die Konstruktion der Verbindungsmorphismen und der langen exakten Tor-Sequenz ist bereits in Lemma 5.3.8 enthalten. □

Bemerkung 5.3.9 (Funktorialität in der ersten Variablen)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist dann $\operatorname{Tor}_n^R(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ auch in der ersten Variablen funktoriell (nachrechnen). Auf das Zusammenspiel der ersten und zweiten Variablen gehen wir in Satz 5.3.15 genauer ein.

Ausblick 5.3.10 (die derivierte Kategorie)**.** Auf die Dauer ist es mühsam bei der Betrachtung abgeleiteter Funktoren (wie zum Beispiel Tor), projektive Auflösungen etc. zu wählen und immer darauf zu achten, dass alles nur „bis auf Kettenhomotopie“ oder „in Homologie“ eindeutig ist. Abhilfe schafft die sogenannte *derivierte Kategorie der Kettenkomplexe*. Grob gesagt wird diese wie folgt konstruiert: Sei R ein ninoko Ring. Statt der Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ der R-Linksmoduln betrachten wir dann

- die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Kettenkomplexe,
- gehen dann zu Homotopiekategorie über (Ausblick 5.1.15),
- und lokalisieren dann diese Kategorie an der Klasse der Kettenabbildungen, die Isomorphismen in Homologie induzieren (d.h. wie bei der klassischen Lokalisierung von Ringen invertieren wir solche Kettenabbildungen formal durch einen geeigneten Bruchrechnungskalkül).

Die entstehende, derivierte, Kategorie ist ein geeigneter Lebensraum für abgeleitete Funktoren. Projektive Auflösungen liefern eine Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Modulkategorie und der derivierten Kategorie etwas konkreter zu beschreiben (dies ist auch der Grund, warum man abgeleitete Funktoren konstruieren kann, ohne die derivierte Kategorie einzuführen).

5.3.3 Beispiele

Beispiel 5.3.11 (Tor und Flachheit)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ ein flacher R-Rechtsmodul. Dann gilt für alle $N \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, dass

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\},$$

denn: Da M flach ist, ist mit der Auflösung $(C(N), \varepsilon_N)$ von N auch der Komplex $M \otimes_R \big(C(N) \square \varepsilon_N\big)$ exakt. Insbesondere ist

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) = H_n\big(M \otimes_R C(N)\big) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Beispiel 5.3.12 (Tor und direkte Summen)**.** Da Tensorprodukte und Homologie (nachrechnen) mit direkten Summen verträglich sind, ist die Konstruktion der Tor-Funktoren in Definition 5.3.5 im ersten Argument mit direkten Summen verträglich.

Mit der Flexibilität aus Lemma 5.3.7 und dem Hufeisenlemma (Proposition 5.2.15) kann man zeigen, dass die Tor-Funktoren auch im zweiten Argument mit direkten Summen verträglich sind (nachrechnen).

Beispiel 5.3.13 (Tor über Hauptidealringen)**.** Sei R ein Hauptidealring (z.B. $R = \mathbb{Z}$), sei M ein R-Modul und sei N ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt

$$\operatorname{Tor}_n^R(M, N) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, denn: Da N endlich erzeugt ist, gibt es für ein geeignetes $d \in \mathbb{N}$ einen Epimorphismus $\pi\colon R^d \longrightarrow N$. Da R ein Hauptidealring ist, ist $\ker \pi \subset R^d$ ein freier Modul (Satz II.2.5.14). Also ist

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker \pi \longrightarrow R^d \xrightarrow{\pi} N$$

eine projektive Auflösung des R-Moduls N. Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so ist der Kettenmodul dieser Auflösung im Grad n der triviale Modul. Insbesondere ist

$$\operatorname{Tor}_n^R(M, N) \cong_R \{0\}.$$

Außerdem können wir $\operatorname{Tor}_1^R(M, N)$ für endlich erzeugte Moduln M, N über dem Hauptidealring R mithilfe der Klassifikation der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen (Satz II.2.5.15), der Verträglichkeit von Tor mit direkten Summen (Beispiel 5.3.12) und der Berechnung aus Beispiel 5.3.4 berechnen.

Beispiel 5.3.14 (unendliche homologische Dimension)**.** Sei $R := \mathbb{Z}[T]/(T^2 - 1)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Tor}_n^R(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \{0\} & \text{falls } n > 0 \text{ gerade} \end{cases}$$

Begründung: Wir verwenden die projektive R-Auflösung (P, ε) von $\mathbb{Z}$ aus Beispiel 5.2.7 und das Tor-Rezept aus Lemma 5.3.7: Der Komplex $\mathbb{Z} \otimes_R P$ ist (da $[T]$ als Identität auf $\mathbb{Z}$ operiert) isomorph zu dem unteren Komplex

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes_R R & \xrightarrow{\mathbb{Z}\otimes_R[1-T]} & \mathbb{Z} \otimes_R R & \xrightarrow{\mathbb{Z}\otimes_R[1+T]} & \mathbb{Z} \otimes_R R & \xrightarrow{\mathbb{Z}\otimes_R[1-T]} & \mathbb{Z} \otimes_R R \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \cong_{\mathbb{Z}}} & & \uparrow{\scriptstyle \cong_{\mathbb{Z}}} & & \uparrow{\scriptstyle \cong_{\mathbb{Z}}} & & \uparrow{\scriptstyle \cong_{\mathbb{Z}}} \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \xrightarrow[2]{} & \mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Also erhalten wir

$$\operatorname{Tor}_n^R(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(\mathbb{Z} \otimes_R P) \cong_{\mathbb{Z}} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \{0\} & \text{falls } n > 0 \text{ gerade} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere zeigt dies: Der R-Modul $\mathbb{Z}$ besitzt *keine* endliche projektive R-Auflösung (!), denn sonst wäre nach Lemma 5.3.7 $\mathrm{Tor}_n^R(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ in allen groß genugen Graden n trivial. Der harmlos wirkende Modul $\mathbb{Z}$ (Quietscheentchen!) ist also über R ein Monstermodul.

Satz 5.3.15 (Symmetrie von Tor)**.** *Sei R ein ninoko Ring und seien $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ bzw. $N \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Ist (P,ε) eine projektive Auflösung von M in Mod_R, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(P \otimes_R N).$$

Beweis. Es gibt mehrere mögliche Beweisstrategien. Zum Beispiel kann man dazu die Eindeutigkeit aus Satz 5.3.2 verwenden:

Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, $N \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$, so betrachten wir

$$T_n(M,N) := H_n\big(C'(M) \otimes_R N\big),$$

wobei C' die Rechtsmodulversion der funktoriellen Auflösung bezeichnet. Dann gilt:

- Der Funktor $T_0(M,\ \cdot\ )$ ist zu $M \otimes_R\ \cdot : \mathsf{Mod}_R \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph (analog zu Lemma 5.3.6).
- Ist M ein R-Rechtsmodul und (P,ε) eine projektive Auflösung von M in Mod_R, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $T_n(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(P \otimes_R N)$ (analog zu Lemma 5.3.7).
- Ist
$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ und ist M ein R-Rechtsmodul, so ist
$$0 \longrightarrow C'(M) \otimes_R N' \xrightarrow{f} C'(M) \otimes_R N \xrightarrow{g} C'(M) \otimes_R N'' \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ (da $C'(M)$ gradweise flach ist). Mit der langen exakten Homologiesequenz (Proposition 5.1.17) erhalten wir daraus eine lange exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow T_k(M,N') \longrightarrow T_k(M,N) \longrightarrow T_k(M,N'') \xrightarrow{\partial_k} T_{k-1}(M,N') \longrightarrow \cdots$$

Analog zur Konstruktion aus Definition 5.3.5 kann man nun zeigen, dass auch diese Funktoren $T_n(M,\ \cdot\ )$ zusammen mit den obigen Verbindungshomomorphismen eine Ableitung des Tensorproduktfunktors $M \otimes_R\ \cdot$

bilden. Mit der Eindeutigkeit (Satz 5.3.2) erhalten wir daher insbesondere $\operatorname{Tor}_n^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} T_n(M,N)$; mit dem zweiten Zwischenschritt folgt somit die Behauptung. □

Korollar 5.3.16 (Symmetrie von Tor über kommutativen Ringen)**.** *Sei R ein (kommutativer!) Ring und seien M und N Moduln über R. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$\operatorname{Tor}_n^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_n^R(N,M).$$

Beweis. Da R kommutativ ist, können wir M und N als Bimoduln auffassen und zwischen Links- und Rechtsmodulstrukturen hin- und herwechseln. Mit Satz 5.3.15 und Bemerkung 1.5.9 erhalten wir daher für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Tor}_n^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} H_n\big(C(M) \otimes_R N\big) \cong_{\mathbb{Z}} H_n\big(N \otimes_R C(M)\big) = \operatorname{Tor}_n^R(N,M)$$

Alle diese Isomorphismen sind natürlich (in beiden Variablen). □

Zum Beispiel kann man damit die folgende Charakterisierung von lokal freien Moduln beweisen:

Satz 5.3.17 (lokal freie Moduln über noetherschen Ringen)**.** *Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul M ist flach.*
2. *Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ ist $M_p = R_p \otimes_R M$ ein flacher R_p-Modul.*
3. *Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ ist $M_p = R_p \otimes_R M$ ein freier R_p-Modul.*

Beweis. Zu 1. $\iff$ 2. Dies haben wir bereits ganz allgemein bewiesen (Proposition 3.4.6).

Zu 3. $\implies$ 2. Wir wissen außerdem bereits, dass freie Moduln flach sind.

Zu 2. $\implies$ 3. Es sei die zweite Bedingung erfüllt. Sei $p \in \operatorname{Spec} R$. Da M endlich erzeugt ist, ist auch der R_p-Modul M_p endlich erzeugt. Mit Lemma 5.3.18 folgt daher, dass M_p nicht nur flach, sondern sogar frei als R_p-Modul ist. □

Lemma 5.3.18. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring und sei M ein endlich erzeugter flacher R-Modul. Dann ist M bereits ein freier R-Modul.*

Beweis. Mithilfe von Tor (statt Projektivität) passen wir den Beweis von Lemma 3.4.11 auf diese Situation an: Sei $m \subset R$ das maximale Ideal von R und sei $k := R/m$ der Restklassenkörper von R. Wir verwenden den Basiswechsel $k \otimes_R \cdot$.

- Da M endlich erzeugt ist, ist auch $\dim_k k \otimes_R M$ endlich.

- Wir wählen nun $x_1, \dots, x_d \in M$, für die die zugehörige Familie in $k \otimes_R M \cong_k M/m \cdot M$ eine k-Basis ist. Dies liefert einen R-Modulhomomorphismus
$$f\colon R^d \longrightarrow M,$$
für den der induzierte Homomorphismus $k \otimes_R f\colon k^d \longrightarrow k \otimes_R M$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist. Es genügt nun zu zeigen, dass f ein Isomorphismus ist.

- Das Lemma von Nakayama liefert, dass f surjektiv ist (Übungsaufgabe).

- Außerdem ist f auch injektiv, denn: Wir zeigen dazu, dass $K := \ker f \subset R^d$ trivial ist. Da R noethersch ist, ist K ein endlich erzeugter R-Modul (Proposition 4.1.9).

  Da M ein flacher R-Modul ist, folgt analog zu Beispiel 5.3.11 mit Satz 5.3.15, dass
$$\operatorname{Tor}_1^R(k, M) \cong_R \{0\}.$$
  Also liefert die lange exakte Tor-Sequenz für $\operatorname{Tor}^R(k, \cdot\,)$, dass
$$\{0\} \cong_{\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_1^R(k, M) \longrightarrow k \otimes_R K \xrightarrow{k \otimes_R \mathrm{Inkl}} k \otimes_R R^d \xrightarrow{k \otimes_R f} k \otimes_R M \longrightarrow 0$$
  exakt ist.

  Da $k \otimes_R f$ nach Konstruktion ein Isomorphismus ist, ist somit $k \otimes_R K \cong_k \{0\}$. Da K endlich erzeugt ist, folgt aus dem Lemma von Nakayama (oder Satz 3.1.6), dass $K \cong_R \{0\}$. Also ist f injektiv.

Insgesamt haben wir daher $R^d \cong_R M$ gezeigt. Also ist M ein freier R-Modul, wie behauptet. □

Ausblick 5.3.19 (lokal frei vs. projektiv)**.** Mit denselben Techniken kann man auch die folgende Variante beweisen (bei der die Endlichkeitsbedingung an eine andere Stelle verschoben ist): Sei R ein Ring und sei M ein endlich präsentierter R-Modul. Dann sind äquivalent:

1. Der R-Modul M ist projektiv.
2. Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ ist $M_p = R_p \otimes_R M$ ein freier R_p-Modul.

Dass M *endlich präsentiert* ist, bedeutet dabei, dass es für ein geeignetes $d \in \mathbb{N}$ einen Epimorphismus $R^d \longrightarrow M$ gibt, dessen Kern endlich erzeugt ist.

Ausblick 5.3.20 (Wo begegnet man Tor?)**.** Es gibt viele Situationen in der algebraischen Geometrie und der algebraischen Topologie, in denen Kettenkomplexe, ihre Homologie und Tensorprodukte betrachtet werden. Bei Berechnungen in solchen Kontexten treten daher auch regelmäßig Tor-Terme als Korrekturterme auf.

A
Anhang

Überblick über dieses Kapitel.

A.1	Das Wörterbuch der affinen algebraischen Geometrie	A.3
A.2	Die adische Topologie	A.5
A.3	Algorithmische Kommutative Algebra	A.7

A.1 Das Wörterbuch der affinen algebraischen Geometrie

Wir sammeln hier die ersten Einträge im Wörterbuch der affinen algebraischen Geometrie. Die Begriffe entsprechen sich dabei nicht in allen Fällen ohne weitere Voraussetzungen exakt, sondern manchmal nur ungefähr. Die Korrespondenzen, die in dieser Vorlesung nicht im Detail erklärt werden, sind grau dargestellt.

Affine algebraische Geometrie	**Ringtheorie**
affiner Raum $\mathbb{A}^n_K$	Spec $K[X_1, \ldots, X_n]$
affine algebraische Teilmenge	(radikales) Verschwindungsideal
irreduzible algebraische Teilmenge	primes Verschwindungsideal
affines Schema	Primspektrum
abgeschlossener Punkt	maximales Ideal
verallgemeinerter Punkt	Primideal
Polynomfunktionen auf einer affinen algebraischen Teilmenge	(Koordinaten-)Ring
Polynomfunktionen, die in einer Umgebung eines Punkts definiert sind	Lokalisierung des (Koordinaten-)Rings
Morphismen algebraischer Mengen	Ringhomomorphismen
Dimension	Krull-Dimension
algebraische Vektorbündel	Moduln

A.2 Die adische Topologie

Die adische Vervollständigung von Ringen (Kapitel 3.5) kann auch mit topologischen Mitteln verstanden werden:

Bemerkung A.2.1 (die adische Topologie)**.** Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal. Dann ist

$$B := \{x + a^n \mid x \in R, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

eine Umgebungsbasis einer Topologie auf R, denn:

- Es gilt $\bigcup B = R$, denn: Es ist

$$R = \bigcup_{x \in R} \{x\} \subset \bigcup_{x \in R} (x + a).$$

- Für alle $U, V \in B$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gibt es ein $W \in B$ mit $W \subset U \cap V$, denn: Seien $x, y \in R$, $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $(x + a^n) \cap (y + a^m) \neq \emptyset$. Sei $z \in (x + a^n) \cap (y + a^m)$. Dann ist $z + a^{\max(n,m)} \subset (x + a^n) \cap (y + a^m)$ (nachrechnen).

Wir bezeichnen diese Topologie als die *a-adische Topologie auf R.*

Bezüglich dieser Topologie können wir von konvergenten bzw. Cauchyfolgen sprechen:

Definition A.2.2 (adisch konvergent, adische Cauchyfolge)**.** Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal.

- Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in R ist *a-adisch konvergent*, wenn es ein $x \in R$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k \in \mathbb{N}_{\geq N}} \quad x_k - x \in a^n.$$

- Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in R ist eine *a-adische Cauchyfolge*, wenn folgendes gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k,\ell \in \mathbb{N}_{\geq N}} \quad x_k - x_\ell \in a^n.$$

Es handelt sich bei der adischen Konvergenz also um arithmetische Konvergenz (d.h. Elemente, die sich „gut“ teilen lassen, sind „nahe“ bei Null), nicht um die aus der klassischen Geometrie bekannte Konvergenz.

Beispiel A.2.3. Die Folge

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

in $\mathbb{Z}$ konvergiert bezüglich der (2)-adischen Topologie gegen 0; indem man die Reste dieser Folge modulo 3 betrachtet, kann man zeigen, dass diese Folge bezüglich der (3)-adischen Topologie auf $\mathbb{Z}$ *nicht* konvergiert.

Die adische Vervollständigung kann im folgenden Sinne tatsächlich als Vervollständigung angesehen werden (Übungsaufgabe):

Proposition A.2.4 (adische Vervollständigung als Vervollständigung)**.** *Sei R ein Ring, sei $a \subset R$ ein Ideal, sei $i\colon R \longrightarrow R_{[\![a]\!]}$ der kanonische Ringhomomorphismus und $\widehat{a}$ das von $i(a)$ in $R_{[\![a]\!]}$ erzeugte Ideal. Dann gilt:*

1. *Die Menge $i(R)$ ist dicht in $R_{[\![a]\!]}$ bezüglich der $\widehat{a}$-adischen Topologie.*
2. *Der Ring $R_{[\![a]\!]}$ ist $\widehat{a}$-adisch vollständig.*

Ein Vorzug dieser Charakterisierung ist, dass man damit auch Ringhomomorphismen aus adischen Vervollständigungen heraus (in vollständige Ringe) gut beschreiben kann – als eindeutige stetige Fortsetzung von Ringhomomorphismen auf dem gegebenen Ring.

A.3 Algorithmische Kommutative Algebra

Möchte man die Kommutative Algebra auf konkrete Probleme (z.B. in der Robotik; Ausblick 2.2.13) anwenden, so stellt sich die Frage, inwieweit die Idealtheorie in Polynomringen $K[X_1, \ldots, X_n]$ über Körpern algorithmisch behandelt werden kann. Zum Beispiel: Gibt es Algorithmen, die

- für Ideale $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ entscheiden können, ob $f \in a$ ist?
- für Ideale $a, b \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ das Ideal $a \cap b$ berechnen können?
- zu Idealen $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ das Radikal $\sqrt{a}$ berechnen können?
- zu Idealen $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ die Primärzerlegung bestimmen können?

Um diese Fragen zu beantworten, ist es essentiell, Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$ gut beschreiben zu können. Nach dem Hilbertschen Basissatz (Satz 4.1.10) ist jedes Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ endlich erzeugt. Die Kunst besteht nun darin, „gute“ endliche Erzeugendensysteme zu bestimmen.

Ist $n = 1$, so ist der zugehörige Polynomring $K[X_1]$ ein euklidischer Ring; mithilfe des euklidischen Algorithmus (Algorithmus II.2.4.28) lassen sich Ideale in $K[X_1]$ gut behandeln.

Beispiel A.3.1 (Das Ideal-Mitgliedschafts-Problem in einer Variablen)**.** Sei $F \subset K[X_1]$ eine endliche Teilmenge und sei $f \in K[X_1]$. Wir können wie folgt algorithmisch entscheiden, ob $f \in (F)$ ist oder nicht:

- Mit dem euklidischen Algorithmus bestimmen wir „den“ größten gemeinsamen Teiler g von F in $K[X_1]$.
  [Dann ist $(g) = (F)$.]
- Mithilfe von Polynomdivision (Beweis von Proposition II.2.4.6) bestimmen wir dann den Rest $r \in K[X_1]$ von f bei Division durch g.
  - Ist $r = 0$, so ist $f \in (g) = (F)$.
  - Ist $r \neq 0$, so ist $f \notin (g) = (F)$.

Ist $n > 1$, so versucht man, sich auf sogenannte monomiale Ideale zurückzuziehen, und ersetzt den euklidischen Algorithmus durch einen allgemeineren Divisionsalgorithmus. Die Kombination dieser Ideen führt zu den Gröbner-Basen, die die Grundlage der algorithmischen Kommutativen Algebra bilden.

Caveat A.3.2. In diesem Kontext steht das Wort *Basis* im Normalfall für Erzeugendensysteme von Idealen (und nicht für Basen im Sinne der Linearen Algebra).

Notation A.3.3. Im folgenden sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

A.3.1 Monomiale Ideale

Definition A.3.4 (monomiales Ideal)**.**

- Ist $\alpha \in \mathbb{N}^n$, so schreiben wir $X^\alpha := \prod_{j=1}^n X_j^{\alpha_j} \in K[X_1, \ldots, X_n]$.
- Ein Ideal $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ist *monomial*, wenn es von Monomen erzeugt wird, d.h., wenn es eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}^n$ gibt mit

$$a = \big(\{X^\alpha \mid \alpha \in A\}\big) \subset K[X_1, \ldots, X_n].$$

Wichtige Eigenschaften monomialer Ideale sind [6, Kapitel 2.4]: Sei $a = (\{X^\alpha \mid \alpha \in A\}) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein monomiales Ideal.

- Ist $\beta \in \mathbb{N}^n$, so gilt genau dann $X^\beta \in a$, wenn es ein $\alpha \in A$ mit $X^\alpha \mid X^\beta$ gibt.
- Ist $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, so gilt genau dann $f \in a$, wenn jeder monomiale Term von f in a liegt.
- *Dicksons Lemma.* Es gibt eine endliche Teilmenge $A' \subset A$ mit $a = (\{X^\alpha \mid \alpha \in A'\})$.

Mit monomialen Idealen kann man also effizient umgehen.

A.3.2 Leitkoeffizienten

In der klassischen Polynomdivision und im euklidischen Algorithmus wird die Größe von Polynomen durch den Grad gemessen. Für Polynome in mehreren Variablen benötigen wir also eine geeignete Gradfunktion. Außerdem bietet es sich an, wie im Beweis des Hilbertschen Basissatzes (Satz 4.1.10), Leitkoeffizienten etc. zu betrachten.

Definition A.3.5 (lexikographische Ordnung)**.** Auf $\mathbb{N}^n$ betrachten wir die *lexikographische Ordnung*, die wie folgt definiert ist: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ sei genau dann $\alpha < \beta$, wenn es ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,k-1\}} \quad \alpha_j = \beta_j \quad \text{und} \quad \alpha_k < \beta_k$$

gibt.

Bemerkung A.3.6. Die Theorie der Gröbner-Basen funktioniert auch mit geeigneten anderen Ordnungen auf Monomen. Je nach Anwendung kann es günstig sein, nicht die lexikographische Ordnung zu verwenden.

Definition A.3.7 (Multigrad, Leit...). Sei $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \cdot X^\alpha \in K[X_1,\dots,X_n]$. Dann definieren wir:

Multigrad von f	$\operatorname{mdeg} f := \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0\} \in \mathbb{N}^n$
Leitkoeffizient von f	$\operatorname{LC}(f) := a_{\operatorname{mdeg} f} \in K$
Leitmonom von f	$\operatorname{LM}(f) := X^{\operatorname{mdeg} f} \in K[X_1,\dots,X_n]$
Leitterm von f	$\operatorname{LT}(f) := \operatorname{LC}(f)\cdot\operatorname{LM}(f) = a_{\operatorname{mdeg} f}\cdot X^{\operatorname{mdeg} f}$

Definition A.3.8 (Leittermideal). Sei $a \subset K[X_1,\dots,X_n]$ ein Ideal. Dann schreiben wir

$$\operatorname{LT}(a) := \big\{\operatorname{LT}(f) \;\big|\; f \in a \setminus \{0\}\big\} \subset K[X_1,\dots,X_n].$$

Man bezeichnet $(\operatorname{LT}(a))$ als das *Leittermideal von* a.

A.3.3 Verallgemeinerte Division

Da $K[X_1,\dots,X_n]$ mit $n \geq 2$ *kein* euklidischer Ring ist, gibt es keine gewöhnliche Division mit Rest in $K[X_1,\dots,X_n]$. Als Ersatz dafür verwendet man den folgenden verallgemeinerten Divisionsalgorithmus:

Satz A.3.9 (verallgemeinerte Division). *Sei $d \in \mathbb{N}$ und seien $g_1,\dots,g_d \in K[X_1,\dots,X_n]$. Ist $f \in K[X_1,\dots,X_n]$, so gibt es eine Darstellung*

$$f = q_1\cdot g_1 + \cdots + q_d \cdot g_d + r,$$

wobei $q_1,\dots,q_d,r \in K[X_1,\dots,X_n]$ sind und r die folgende Bedingung erfüllt: Es ist $r = 0$ oder keines *der Monome in r is durch eines der Monome $\operatorname{LT}(g_1),\dots,\operatorname{LT}(g_d)$ teilbar. Eine solche Darstellung wird durch den Algorithmus A.3.10 berechnet.*

Man nennt dann r einen Rest von f bei Division durch $\{g_1,\dots,g_d\}$.

Algorithmus A.3.10 (verallgemeinerter Divisionsalgorithmus). Sei $f, g_1,\dots,g_d \in K[X_1,\dots,X_n]$. Wir berechnen daraus das $(d+1)$-Tupel

$$\mathsf{Div}(f,g_1,\dots,g_d,0,\dots,0,f) \in K[X_1,\dots,X_n]^{d+1}.$$

Dabei ist $\mathsf{Div}(f,g_1,\dots,g_d,q_1,\dots,q_d,r)$ (für $q_1,\dots,q_d,r \in K[X_1,\dots,X_n]$) wie folgt definiert:

- Falls es ein $j \in \{1,\dots,d\}$ mit $\operatorname{LT}(g_j) \mid \operatorname{LT}(r)$ gibt, so setzen wir (falls der Algorithmus deterministsch sein soll, wählen wir dafür das minimale solche j)

$$\overline{q}_j := q_j + \frac{\operatorname{LT}(r)}{\operatorname{LT}(g_j)}$$
$$\overline{r} := r - \frac{\operatorname{LT}(r)}{\operatorname{LT}(g_j)}\cdot g_j$$

und bestimmen rekursiv

$$\mathsf{Div}(f, g_1, \ldots, g_d, q_1, \ldots, q_{j-1}, \overline{q}_j, q_{j+1}, \ldots, q_d, \overline{r}).$$

- Falls es *kein* $j \in \{1, \ldots, d\}$ mit $\mathrm{LT}(g_j) \mid \mathrm{LT}(r)$ gibt, so ist das Ergebnis $(q_1, \ldots, q_d, r)$.

A.3.4 Gröbner-Basen

Nach Konstruktion sind Leittermideale monomiale Ideale (und können somit gut behandelt werden). Gröbner-Basen sind endliche Erzeugendensysteme von Idealen, deren Leitterme das zugehörige Leittermideal erzeugen; somit können viele Fragen über allgemeine Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$ in entsprechende Fragen über monomiale Ideale übersetzt werden (die sich dann algorithmisch lösen lassen).

Satz und Definition A.3.11 (Gröbner-Basis)**.** *Sei $a \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal.*

1. *Dann existiert ein $d \in \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_d \in a$ mit*

$$\big(\mathrm{LT}(a)\big) = \big(\mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_d)\big) \subset K[X_1, \ldots, X_n].$$

2. *In diesem Fall ist $\{g_1, \ldots, g_d\}$ bereits ein Erzeugendensystem von a.*

Man nennt dann $\{g_1, \ldots, g_d\}$ eine Gröbner-Basis von a.

Beweis. Zu 1. Da $(\mathrm{LT}(a))$ ein monomiales Ideal ist, folgt dies aus Dicksons Lemma.

Zu 2. Dies kann man zum Beispiel mit dem verallgemeinerten Divisonsalgorithmus (Algorithmus A.3.10) nachweisen [6, Exercise 2.5.6]. □

Bemerkung A.3.12 (Eindeutigkeit von Resten bei der verallgemeinerten Division)**.** Ist $\{g_1, \ldots, g_d\} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, so schreiben wir auch kurz

$$\overline{f}^{\{g_1, \ldots, g_d\}} := \mathsf{Div}(f, g_1, \ldots, g_d, 0, \ldots, 0, f) \in K[X_1, \ldots, X_n].$$

Ist $\{g_1, \ldots, g_d\}$ eine Gröbner-Basis eines Ideals in $K[X_1, \ldots, X_n]$, so gilt: Für jedes $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gibt es *genau einen* Rest $r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ von f bei Division durch $\{g_1, \ldots, g_d\}$ [6, Proposition 2.6.1]. Insbesondere ist dann $\overline{f}^{\{g_1, \ldots, g_d\}} = r$.

A.3.5 Der Algorithmus von Buchberger

Möchte man Idealprobleme algorithmisch mit Gröbner-Basen lösen, so ist es erforderlich, Gröbner-Basen aus endlichen Erzeugendensystemen von Idealen algorithmisch zu bestimmen. Dies leistet der Algorithmus von Buchberger.

Satz A.3.13 (Berechnung von Gröbner-Basen). *Sei $F \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ eine endliche Teilmenge. Dann terminiert der Algorithmus von Buchberger auf F und* Buchberger(F) *(Algorithmus A.3.15) ist eine Gröbner-Basis von (F) (die F enthält).*

Ist $\{g_1, \ldots, g_d\} \subset K[X_1, \ldots, X_n]$, so ist $\{g_1, \ldots, g_d\}$ im allgemeinen *keine* Gröbner-Basis von $(g_1, \ldots, g_d) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$, da sich bei Kombination der $g_1, \ldots, g_d$ hohe Terme wegheben können und dadurch „neue“ Leitkoeffizienten entstehen. Daher führt man die folgende Notation ein:

Notation A.3.14. Sind $g, h \in K[X_1, \ldots, X_n]$, so schreiben wir

$$S(g,h) := \frac{X^\gamma}{\mathrm{LT}(g)} \cdot g - \frac{X^\gamma}{\mathrm{LT}(h)} \cdot h,$$

wobei $\alpha := \mathrm{mdeg}\, g$, $\beta := \mathrm{mdeg}\, h$, $\gamma := (\max(\alpha_1, \beta_1), \ldots, \max(\alpha_n, \beta_n)) \in \mathbb{N}^n$. Nach Konstruktion sorgt also $S(g,h)$ für die Elimination der Leitterme.

Beweis von Satz A.3.13. Der Beweis [6, Kapitel 2.7] beruht auf dem *Kriterium von Buchberger*: Ist $G \subset K[X_1, \ldots X_n]$ mit $F \subset G$, so ist G genau dann eine Gröbner-Basis von (F), wenn folgendes gilt:

$$\forall_{g,h \in G} \quad g \neq h \Longrightarrow \overline{S(g,h)}^G = 0$$

(für die Notation: s. Notation A.3.14). □

Algorithmus A.3.15 (Algorithmus von Buchberger). Sei $G \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ eine endliche Teilmenge. Dann berechnen wir die endliche Teilmenge

$$\mathsf{Buchberger}(G) \subset K[X_1, \ldots, X_n]$$

wie folgt:

- Sei $M := \left\{ \overline{S(g,h)}^G \;\middle|\; g, h \in G \text{ mit } g \neq h \right\}$ (wobei wir die Reste mithilfe von Algorithmus A.3.10 bestimmen).
  - Ist $M = \{0\}$, so ist G das Ergebnis.
  - Ist $M \neq \{0\}$, so bestimmen wir rekursiv Buchberger$(G \cup M)$.

A.3.6 Ein Beispielproblem

Zum Abschluss zeigen wir an einem einfachen Beispiel, wie die Theorie der Gröbner-Basen eingesetzt werden kann:

Beispiel A.3.16 (Ideal-Mitgliedschafts-Problem)**.** Sei $F \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ und sei $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Wir können wie folgt algorithmisch entscheiden, ob $f \in (F)$ ist oder nicht:

- Mit dem Algorithmus von Buchberger (Algorithmus A.3.15) bestimmen wir eine Gröbner-Basis G von (F) (mit $F \subset G$).
  [Dann ist $(G) = (F)$.]
- Mit dem verallgemeinerten Divisionsalgorithmus (Algorithmus A.3.10) bestimmen wir dann $\overline{f}^G \in K[X_1, \ldots, X_n]$.
  - Ist $\overline{f}^G = 0$, so ist $f \in (G) = (F)$.
    [Nach Definition der Reste.]
  - Ist $\overline{f}^G \neq 0$, so ist $f \notin (G) = (F)$.
    [*Angenommen,* $f \in (F) = (G)$. Dann wäre auch $\overline{f}^G \in (G)$, und damit $\mathrm{LT}(\overline{f}^G) \in (\mathrm{LT}(G))$, im Widerspruch zu den Eigenschaften monomialer Ideale und der Definition der Reste.]

Anmerkung zum Lernen. Vergleichen Sie Beispiel A.3.1 und Beispiel A.3.16.

B
Übungsblätter

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 0 vom 13. April 2018

Aufgabe 1 (Kategorien)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist X ein Objekt einer Kategorie C, so ist $\mathrm{Mor}_C(X, X) \neq \emptyset$.
2. Sind X und Y Objekte in einer Kategorie C, so ist $\mathrm{Mor}_C(X, Y) \neq \emptyset$.

Aufgabe 2 (eindeutige Morphismen)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$.

1. Zeigen Sie, dass es nur genau einen Identitätsmorphismus für X in C gibt.
2. Zeigen Sie: Ist $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ ein Isomorphismus, so gibt es genau einen zu f inversen Isomorphismus in $\mathrm{Mor}_C(Y, X)$.
3. Wie können Sie aus diesen Aussagen die Eindeutigkeit neutraler Elemente bzw. inverser Elemente in Gruppen ableiten?

Aufgabe 3 (glatte Funktionen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Definieren Sie die Kategorie Open_n der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und Inklusionen solcher Teilmengen und weisen Sie nach, dass es sich dabei um eine Kategorie handelt.
2. Definieren Sie den kontravarianten Funktor $C^\infty \colon \mathsf{Open}_n \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ der glatten Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und Einschränkung solcher Funktionen und weisen Sie nach, dass es sich dabei um einen Funktor handelt.

Hinweis. Falls Sie Analysis II noch nicht gehört haben, können Sie sich auf den Fall $n = 1$ beschränken.

Aufgabe 4 (Null)**.** Sei C eine Kategorie. Ein *Nullobjekt in* C ist ein Objekt $N \in \mathrm{Ob}(C)$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}(C)$ gibt es genau einen Morphismus in $\mathrm{Mor}_C(X, N)$ und genau einen Morphismus in $\mathrm{Mor}_C(N, X)$.

1. Zeigen Sie, dass die Kategorien $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$, Group, ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ jeweils ein Nullobjekt besitzen.
2. Besitzt die Kategorie Set ein Nullobjekt? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Zeigen Sie: Falls eine Kategorie ein Nullobjekt besitzt, so ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bonusaufgabe (Functor)**.** Was hat die Typklasse Functor in der Programmiersprache Haskell (http://www.haskell.org) mit Funktoren im Sinne der Kategorientheorie zu tun?
Hinweis. Betrachten Sie die Kategorie, deren Objekte Haskell-Typen und deren Morphismen Haskell-Funktionen sind ...

---

keine Abgabe; diese Aufgaben werden in den Übungen
in der zweiten Vorlesungswoche besprochen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 1 vom 13. April 2018

Aufgabe 1 (kleine Kategorien)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gibt eine Kategorie mit genau 2018 Objekten.
2. Ist X ein Objekt in einer Kategorie C mit $|\mathrm{Mor}_C(X,X)| = 2018$, so ist jeder Morphismus in $\mathrm{Mor}_C(X,X)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2 (Isomorphie)**.** Sei C eine Kategorie und $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$.

1. Zeigen Sie: Gilt $X \cong_C Y$, so folgt $Y \cong_C X$.
2. Zeigen Sie: Gilt $X \cong_C Y$ und $Y \cong_C Z$, so folgt $X \cong_C Z$.

Aufgabe 3 (Gruppenkategorien)**.** Seien G und H Gruppen. Wie kann man Funktoren $C_G \longrightarrow C_H$ gruppentheoretisch beschreiben? Formulieren Sie eine geeignete Behauptung und beweisen Sie diese!

Aufgabe 4 (Kern)**.** Sei C eine Kategorie, die ein Nullobjekt N besitzt (s. Aufgabe 4 von Blatt 0). Sind $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, so schreiben wir $n_{X,Y} \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ für die Komposition der eindeutigen Morphismen in $\mathrm{Mor}_C(N,Y)$ und $\mathrm{Mor}_C(X,N)$. Sind $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$, so ist ein Paar (K,k), bestehend aus einem Objekt $K \in \mathrm{Ob}(C)$ und einem Morphismus $k \in \mathrm{Mor}_C(K,X)$, ein *Kern von f in C*, wenn $f \circ k = n_{K,Y}$ und folgendes gilt: Für jedes Objekt $K' \in \mathrm{Ob}(C)$ und jeden Morphismus $k' \in \mathrm{Mor}_C(K',X)$ mit $f \circ k' = n_{K',Y}$ gibt es genau einen Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_C(K',K)$ mit $k \circ g = k'$.

1. Illustrieren Sie diesen Begriff durch ein geeignetes Diagramm!
2. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass jeder Morphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ einen Kern im obigen Sinne besitzt.
3. Zeigen Sie: Falls ein Morphismus in einer Kategorie einen Kern im obigen Sinne besitzt, so ist dieser Kern „im wesentlichen“ eindeutig bestimmt.

Bonusaufgabe (Gruppoide)**.**

1. Wie sind Gruppoide (via Kategorien) und Gruppoidmorphismen definiert?
2. Was ist der Zusammenhang zu Gruppen und Gruppenhomomorphismen?

Hinweis. Vergessen Sie nicht, alle verwendeten Quellen zu zitieren!

Abgabe bis zum 20. April 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 2 vom 20. April 2018

Aufgabe 1 (Hom)**.** Seien X und Y Moduln über $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Gilt ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(X,\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(Y,\mathbb{Z})$, so folgt $X \cong_{\mathbb{Z}} Y$.
2. Gilt ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(\mathbb{Z},X) \cong_{\mathbb{Z}} {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Hom}(\mathbb{Z},Y)$, so folgt $X \cong_{\mathbb{Z}} Y$.

Aufgabe 2 (Einheitswurzeln)**.**

1. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \quad z^n = 1\}$ der komplexen Einheitswurzeln und die additive Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorph sind.
2. Wie kann man die Familie $(\mathbb{Z}/n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ abelscher Gruppen so zu einem Diagramm (über eine geeignete partielle Ordnung auf $\mathbb{N}_{>0}$) erweitern, dass $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/n \cong_{\mathsf{Ab}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (eine Wurzel aus -1)**.** Sei

$$R := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(5^n) \;\middle|\; \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x_{n+1} \equiv x_n \mod 5^n \right\}.$$

Dann bildet R bezüglich komponentenweiser Addition/Multiplikation einen Ring.

1. Zeigen Sie, dass der durch konstante Folgen gegebene Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ injektiv ist.
2. Wie kann man R als inversen Limes der Form $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(5^n)$ in Ring auffassen?
3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 2 \mod 5$ und es gebe eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + 1 = 5^n \cdot k$. Zeigen Sie: Dann erfüllt $y := x - 4 \cdot 5^n \cdot k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $y^2 \equiv -1 \mod 5^{n+1}$.
4. Folgern Sie: Es gibt ein $x \in R$ mit $x^2 = -1$.

Aufgabe 4 (darstellbare Funktoren und Limiten)**.** Sei C eine Kategorie und sei $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Zeigen Sie, dass der Funktor $\mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ im folgenden Sinne mit inversen Limiten verträglich ist:

> Ist $(I,\leq)$ eine partiell geordnete Menge und ist $Y := \varprojlim_{i\in I} X_i$ ein inverser Limes eines I-Diagramms in C, so erfüllt $\mathrm{Mor}_C(X,Y)$ zusammen mit den induzierten Morphismen die universelle Eigenschaft des inversen Limes $\varprojlim_{i\in I} \mathrm{Mor}_C(X,X_i)$ in Set.

Hinweis. Verstehen Sie, was mit „mit den induzierten Morphismen“ gemeint ist? Welche universelle Eigenschaft ist nachzuweisen?

Bonusaufgabe (Polymorphismus)**.** Was haben polymorphe Funktionen in der Programmiersprache Haskell mit natürlichen Transformationen im Sinne der Kategorientheorie zu tun?
Hinweis. Theorems for free!

Abgabe bis zum 27. April 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 3 vom 27. April 2018

Aufgabe 1 (Tensorquadrate)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
2. Es gilt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

Aufgabe 2 (Tensorprodukt und Ideale)**.** Sei R ein Ring und seien $a, b \subset R$ Ideale in R. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} R/a \otimes_R R/b &\longrightarrow R/(a \cup b) \\ [x] \otimes [y] &\longmapsto [x \cdot y] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter R-Modulisomorphismus ist. Geben Sie zwei Beweise:

1. indem Sie einen inversen Isomorphismus konstruieren.
2. mithilfe der Verträglichkeit von Tensorprodukten mit Quotienten.

Aufgabe 3 (Tensorprodukte und Isomorphie)**.** Sei $R := \mathbb{Z}[X, Y]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mithilfe eines geeigneten Tensorproduktfunktors:

1. $R \oplus R/(X) \ncong_R R \oplus R/(X) \oplus R/(X)$
2. $R/(X) \oplus R/(X) \oplus R/(X+1, Y) \ncong_R R/(X) \oplus R/(X+1, Y) \oplus R/(X+1, Y)$

Aufgabe 4 (Tensorprodukt als Koprodukt)**.** Seien R und S Ringe.

1. Zeigen Sie: die abelsche Gruppe $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ bildet bezüglich der folgenden Multiplikation einen Ring:

$$\begin{aligned} (R \otimes_{\mathbb{Z}} S) \times (R \otimes_{\mathbb{Z}} S) &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S \\ (x \otimes y, x' \otimes y') &\longmapsto (x \cdot x') \otimes (y \cdot y') \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, dass $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ zusammen mit den folgenden Abbildungen das Koprodukt von R und S in der Kategorie Ring bildet:

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S & \qquad S &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} S \\ x &\longmapsto x \otimes 1 & \qquad x &\longmapsto 1 \otimes x \end{aligned}$$

Bonusaufgabe (Tensorprodukt von Körpern)**.** Wir betrachten $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(i)$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ und auf den Tensorprodukten die Ringstruktur, die analog zu Aufgabe 4 definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *kein* Körper ist.
2. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ zum Kompositum $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cdot \mathbb{Q}(i)$ in $\mathbb{C}$ isomorph ist.

Bonusaufgabe (alternative Bonusaufgabe, falls Algebra noch nicht gehört wurde)**.** Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ bezüglich der reellen Addition/Multiplikation einen Körper bildet und dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als Ring zum Restklassenring $\mathbb{Q}[T]/(T^2 - 2)$ isomorph ist.

Abgabe bis zum 4. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 4 vom 4. Mai 2018

Aufgabe 1 (induzierte Abbildungen und Spec)**.** Seien R und S Ringe und sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort! (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist f surjektiv, so ist auch $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ surjektiv.
2. Ist f injektiv, so ist auch $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ injektiv.

Aufgabe 2 (zwei Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{R}[X,Y]/(Y - X^2, Y + X)$.

1. Zeigen Sie, dass $R \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

   Hinweis. Eliminieren Sie zunächst eine Variable und wenden Sie dann den Chinesischen Restsatz an.
2. Folgern Sie, dass $\operatorname{Spec} R$ genau zwei Elemente enthält. Beschreiben Sie diese beiden Primideale in R auf möglichst einfache Weise.

Aufgabe 3 (Zariski-Topologie)**.** Sei R ein Ring. Ist $a \subset R$, so schreiben wir

$$V_R(a) := \{p \in \operatorname{Spec} R \mid a \subset p\} \subset \operatorname{Spec} R.$$

1. Zeigen Sie: Es gibt $a, b \subset R$ mit $V_R(a) = \emptyset$ und $V_R(b) = \operatorname{Spec} R$.
2. Zeigen Sie: Ist $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von R, so gilt
$$\bigcap_{i\in I} V_R(a_i) = V_R\Big(\bigcup_{i\in I} a_i\Big).$$
3. Zeigen Sie: Sind $a, b \subset R$, so gilt $V_R(a) \cup V_R(b) = V_R\big(\{x \cdot y \mid x \in a, y \in b\}\big)$.

Aufgabe 4 (Nilradikal)**.** Sei R ein Ring. Das *Nilradikal von* R ist definiert als

$$N(R) := \{x \in R \mid \exists_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \quad x^n = 0\} \subset R.$$

1. Zeigen Sie, dass $N(R)$ ein Ideal in R ist.
2. Zeigen Sie, dass $N\big(\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)\big)$ *kein* Primideal in $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(4)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass $N(R) \subset \bigcap_{p\in\operatorname{Spec} R} p$.
4. Zeigen Sie, dass $N(R) \supset \bigcap_{p\in\operatorname{Spec} R} p$.

   Hinweis. Zornsches Lemma!

Bonusaufgabe (Topologie via Algebra)**.** Sei X ein topologischer Hausdorffraum (z.B. $X = [0,1]$) und sei

$$\begin{aligned}\mu\colon X &\longrightarrow \operatorname{mSpec} C(X,\mathbb{R})\\ x &\longmapsto \big\{f \in C(X,\mathbb{R}) \;\big|\; f(x) = 0\big\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie: Eine Teilmenge $V \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn es ein Ideal $a \subset C(X,\mathbb{R})$ mit $\mu(V) = V_{C(X,\mathbb{R})}(a) \cap \operatorname{mSpec} C(X,\mathbb{R})$ (Aufgabe 3) gibt.
Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie nur den Spezialfall $X = [0,1]$ behandeln. Die Mengen $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ mit $f \in C(X,\mathbb{R})$ bilden eine Basis der Topologie auf X.

Abgabe bis zum 11. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 5 vom 11. Mai 2018

Aufgabe 1 (affine algebraische Mengen)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $V, W \subset K^n$ affine algebraische Mengen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort! (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Dann ist auch $V \cap W$ eine affine algebraische Menge.
2. Dann ist auch $V \setminus W$ eine affine algebraische Menge.

Aufgabe 2 (Nullstellenmengen vs. Ideale)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V \subset K^n$ eine affine algebraische Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{V}_K\big(\mathbf{I}_K(V)\big) = V.$$

Aufgabe 3 („Octdong“ und „Tuelle“)**.** Wir betrachten die Polynome

$$f := X^2 + Y^2 + Z^4 - Z^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$$
$$g := Y \cdot Z \cdot (X^2 + Y - Z) \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$$

in $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ und die zugehörigen affinen algebraischen Mengen $V := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f)$ bzw. $W := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}(g)$ in $\mathbb{R}^3$.

1. Verwenden Sie ein Computer-Algebra-System Ihrer Wahl, um graphische Darstellungen von V und W zu erhalten. Vergessen Sie nicht, die Achsen zu beschriften!
2. Geben Sie zwei verschiedene Punkte von $\operatorname{Spec} \mathbf{K}_{\mathbb{R}}[V]$ oder zwei verschiedene Punkte von $\operatorname{Spec} \mathbf{K}_{\mathbb{R}}[W]$ an und begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis. Der Körper $\mathbb{R}$ ist *nicht* algebraisch abgeschlossen!

Aufgabe 4 (Nilradikal und Restklassenringe)**.** Sei R ein Ring und sei $N(R) \subset R$ das Nilradikal von R (Aufgabe 4 von Blatt 4).

1. Zeigen Sie: Der Restklassenring $R/N(R)$ enthält außer der Null *keine* nilpotenten Elemente.

   Hinweis. Ein Element $x \in R$ ist *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $x^n = 0$ gibt.
2. Zeigen Sie: Ist S ein Ring, der außer der Null keine nilpotenten Elemente enthält, und ist $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so faktorisiert f eindeutig über einen Ringhomomorphismus $R/N(R) \longrightarrow S$.

Bonusaufgabe (Robotik)**.**

- Wie treten affine algebraische Mengen/Varietäten in der Robotik auf?
- Was sind das *forward* bzw. *inverse kinematics problem*?

Abgabe bis zum 18. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 6 vom 18. Mai 2018

Aufgabe 1 (Dimension, algebraisch)**.** Seien R und S Ringe und sei $f\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ injektiv, so ist $\dim R \leq \dim S$.
2. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ surjektiv, so ist $\dim R \geq \dim S$.

Aufgabe 2 (Dimension, geometrisch)**.** Sei $f := Y^2 - X^3 - X^2 \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}^3$.
2. Zeigen Sie, dass das Polynom f in $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ prim ist.

   Hinweis. Sie dürfen natürlich verwenden, dass $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ faktoriell ist.
3. Bestimmen Sie die Dimension des Koordinatenrings $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$.

Aufgabe 3 (Dimension von $\mathbb{Z}$, anders)**.** Zeigen Sie durch elementare Zahlentheorie (ohne das Kriterium von Coquand und Lombardi zu verwenden):

$$\forall_{x_0,x_1\in\mathbb{Z}} \quad \exists_{k_0,k_1\in\mathbb{N}} \quad \exists_{y_0,y_1\in\mathbb{Z}} \quad x_0^{k_0} \cdot \big(x_1^{k_1} \cdot (1 + x_1 \cdot y_1) + x_0 \cdot y_0\big) = 0.$$

Aufgabe 4 (die p-adischen ganzen Zahlen)**.** Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim und sei

$$\mathbb{Z}_{[\![p]\!]} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n)$$

der *Ring der p-adischen ganzen Zahlen*. Der inverse Limes wird dabei über das inverse System $(\pi_{n,k}\colon \mathbb{Z}/(p^n) \to \mathbb{Z}/(p^k))_{n,k\in\mathbb{N}_{>0},k\leq n}$ der kanonischen Projektionen gebildet; zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\pi_n\colon \mathbb{Z}_{[\![p]\!]} \longrightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$ die zugehörige Strukturabbildung des inversen Limes.

1. Sei $m := \ker \pi_1$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}/m \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{Z}/(p)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass jedes Element aus $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]} \setminus m$ in $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ invertierbar ist.

   Hinweis. Betrachten Sie das konkrete Modell von $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$ als Teilring des Produkts $\prod_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/(p^n)$ und konstruieren Sie das multiplikative Inverse induktiv (ähnlich zu Aufgabe 3 von Blatt 2).
3. Wieviele maximale Ideale besitzt also $\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$?

Bonusaufgabe (1+1=3)**.** Sei K ein Körper, sei $A := K(X) = Q(K[X])$ der rationale Funktionenkörper über K und sei $\widetilde{R} := A[\![Y]\!]$ der formale Potenzreihenring über A. Ist $f \in \widetilde{R}$, so schreiben wir kurz $f(0)$ für den Koeffizienten (in $K(X)$) von Y^0 in f. Sei $R := \big\{f \in \widetilde{R} \;\big|\; f(0) \in K\big\}$.

1. Zeigen Sie, dass $m := \big\{f \in R \;\big|\; f(0) = 0\big\}$ ein maximales Ideal in R ist.
2. Zeigen Sie, dass m das einzige nicht-triviale Primideal von R ist.
3. Sei $p := \big\{g \in R[T] \;\big|\; g(X) = 0 \text{ (in } R)\big\}$. Zeigen Sie, dass p ein Primideal in $R[T]$ ist, das $0 \subsetneq p \subsetneq m[T]$ erfüllt.
4. Zeigen Sie, dass $\dim R = 1$ und $\dim R[T] = 3$ ist.

Abgabe bis zum 25. Mai 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 7 vom 25. Mai 2018

Aufgabe 1 (Verschwindungskriterium?)**.** Sei R ein Integritätsring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $S^{-1}R$ der Nullring, so ist $0 \in S$.
2. Ist $S^{-1}R$ nicht der Nullring, so ist $0 \notin S$.

Aufgabe 2 (Glattheitskriterium)**.** Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2)$ (also der Koordinatenring zu $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y - X^2) \subset \mathbb{C}^2$), sei $p \subset R$ das von $\{[X],[Y]\}$ erzeugte Primideal in R, sei R_p die Lokalisierung von R an $R \setminus p$ und sei m_p das (vom Bild) von p erzeugte Ideal in R_p. Außerdem sei $T_p := m_p/m_p \cdot m_p$ (als R_p-Modul); man bezeichnet T_p auch als *Tangentialraum* von $\operatorname{Spec} R$ im Punkt p, da er durch Ignorieren Terme höherer Ordnung (also durch Ausdividieren von $m_p \cdot m_p$) gebildet wird.

1. Zeigen Sie, dass $R_p \cong_{\mathsf{Ring}} \big\{[f]/[g] \in Q(R) \;\big|\; f,g \in \mathbb{C}[X,Y], g(0,0) \neq 0\big\}$.
2. Zeigen Sie, dass m_p ein maximales Ideal in R_p mit $R_p/m_p \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}$ ist.
3. Zeigen Sie, dass T_p auf kanonische Weise ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.
4. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}} T_p$.

Aufgabe 3 (Lokalitätskriterien)**.** Sei R ein Ring, sei $m \subset R$ ein Ideal mit $m \neq R$. Zeigen Sie:

1. Ist jedes Element aus $R \setminus m$ eine Einheit in R, so ist R ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal m).
2. Ist m ein maximales Ideal in R und ist für jedes $x \in m$ das Element $1 + x$ eine Einheit in R, so ist R ein lokaler Ring (mit maximalem Ideal m).

Aufgabe 4 (Surjektivitätskriterium)**.** Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a \subset J(R)$. Außerdem sei M ein R-Modul, sei N ein endlich erzeugter R-Modul, sei $f\colon M \longrightarrow N$ ein R-Modulhomomorphismus und $\overline{f}\colon M/a\cdot M \longrightarrow N/a\cdot N$ der von f induzierter Homomorphismus. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Homomorphismus f ist surjektiv.
2. Der Homomorphismus $\overline{f}$ ist surjektiv.

Bonusaufgabe (Paritätskriterium)**.**

1. Was besagt der Satz von Monsky?
2. Was hat dieser Satz mit dem Ring der 2-adischen ganzen Zahlen zu tun?

Bonusaufgabe (kommutative Algebraiker; zusätzliche Semesterhalbzeitbonusaufgabe)**.** (Wo) Hängen Bilder von Artin, Hensel, Hilbert, Noether auf den Fluren der Fakultät? Wann haben diese Mathematiker gelebt?

Abgabe bis zum 1. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 8 vom 1. Juni 2018

Aufgabe 1 (Dimension vs. Lokalität)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist R ein lokaler Ring, so ist $\dim R = 0$.
2. Ist R ein Ring mit $\dim R = 0$, so ist R ein lokaler Ring.

Aufgabe 2 (Lokalität der Dimension, Variante)**.** Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass

$$\dim R = \sup \{\dim R_f \mid f \in R\}.$$

Aufgabe 3 (Flachheit vs. Lokalisierung)**.** Sei R ein Ring, sei $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sei M ein R-Modul.

1. Zeigen Sie: Ist M flach, so ist $S^{-1}M$ ein flacher $S^{-1}R$-Modul.
2. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im allgemeinen *nicht* gilt.

Aufgabe 4 (nicht so glatt)**.** Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$ (also der Koordinatenring zu $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2) \subset \mathbb{C}^2$), sei $p \subset R$ das von $\{[X],[Y]\}$ erzeugte Primideal in R, sei R_p die Lokalisierung von R an $R \setminus p$ und sei m_p das (vom Bild) von p erzeugte Ideal in R_p. Außerdem sei $T_p := m_p/m_p \cdot m_p$ (als R_p-Modul; Aufgabe 2 von Blatt 7).

1. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}} T_p$ analog zu Aufgabe 2 von Blatt 7.
2. Schließen Sie daraus, dass R_p *nicht* zu $(\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2))_{([X],[Y])}$ isomorph ist, und erklären Sie, wie das mit der Anschauung zusammenpasst.

Bonusaufgabe (Fasern)**.** Seien R, R' Ringe, sei $f\colon R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus und sei $p \in \operatorname{Spec} R$.

1. Zeigen Sie: Dann gibt es eine mit Inklusionen von Idealen verträgliche Bijektion
$$(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p) \longleftrightarrow \operatorname{Spec} k(p) \otimes_R R';$$
dabei ist $k(p)$ der Restklassenkörper des lokalen Rings R_p und R' wird via f als R-Modul aufgefasst.
2. Wie kann man diese Beschreibung der Faser $(\operatorname{Spec} f)^{-1}(p)$ verwenden, um einen konzeptionellen Beweis von Lemma 2.3.10 zu erhalten?

Abgabe bis zum 8. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 9 vom 8. Juni 2018

Aufgabe 1 (vollständig prim?)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das Element $1 + T$ ist prim in $\mathbb{Z}[\![T]\!]$.
2. Das Element T ist prim in $\mathbb{Z}[\![T]\!]$.

Aufgabe 2 (Potenzpotenzreihen)**.** Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass die Ringe

$$R[X,Y]_{[\![(X,Y)]\!]} \quad \text{und} \quad \varprojlim_{n \in \mathbb{N}_{>0}} R[X,Y]/(X^n, Y^n)$$

isomorph sind. Der inverse Limes wird dabei über die kanonischen Projektionen gebildet.
Hinweis. Im allgemeinen ist $(X,Y)^n \neq (X^n, Y^n)$.

Aufgabe 3 (ein algebraisches Möbiusband)**.** Sei $R := \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ und sei

$$A := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} [1+X] & [Y] \\ [Y] & [1-X] \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(R).$$

Zeigen Sie, dass der R-Modul $M := \{A \cdot x \mid x \in R^2\}$ lokal frei ist.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $A \cdot A = A$. Wie erhält man daraus eine Zerlegung von R^2 ?

Aufgabe 4 (Spaltereien)**.** Sei R ein Ring. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie: Ist M ein R-Modul und gibt es einen R-Modul $\overline{M}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $M \oplus \overline{M} \cong_R R^n$, so folgt: Für jeden surjektiven R-Modulhomomorphismus $f\colon N \longrightarrow M$ gibt es einen *Rechtsspalt*, d.h. einen R-Modulhomomorphismus $\sigma\colon M \longrightarrow N$ mit $f \circ \sigma = \mathrm{id}_M$.

2. Zeigen Sie: Ist $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$, so besitzt f genau dann einen Rechtsspalt, wenn i einen Linksspalt besitzt.

3. Zeigen Sie: Ist $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ und besitzt f einen Rechtsspalt, so ist für jeden R-Modul N die Sequenz

   $$0 \longrightarrow N \otimes_R K \xrightarrow{N\otimes_R i} N \otimes_R M \xrightarrow{N\otimes_R f} N \otimes_R Q \longrightarrow 0$$

   exakt.

Bonusaufgabe (adische Topologie)**.** Lesen Sie Anhang A.2 über die adische Topologie. Zeigen Sie, dass die adische Vervollständigung als Vervollständigung bezüglich der adischen Topologie aufgefasst werden kann (liefern Sie also einen Beweis von Proposition A.2.4).

Abgabe bis zum 15. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 10 vom 15. Juni 2018

Aufgabe 1 (noethersche Ringe)**.** Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort! (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist R noethersch, so ist $\dim R \leq 2018$.
2. Ist $R[T]$ noethersch, so ist R noethersch.

Aufgabe 2 (Länge von Moduln)**.** Sei R ein Ring. Die *Länge* $\ell_R(M)$ eines R-Moduls M ist (in Analogie zur Dimension von Ringen) definiert durch

$$\ell_R(M) := \sup\big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; \text{es gibt } R\text{-Untermoduln } N_0, \dots, N_n \text{ von } M \text{ mit } N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_n\big\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

1. Zeigen Sie: Ist M ein R-Modul mit $\ell_R(M) = 0$, so ist $M \cong_R \{0\}$.
2. Was ist $\ell_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$?
3. Zeigen Sie $\ell_R(M \oplus N) = \ell_R(M) + \ell_R(N)$ für alle R-Moduln M und N.

Aufgabe 3 (Länge als Klassifikationshilfsmittel)**.** Sei R ein Hauptidealring und sei $p \in R$ prim. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgabenteile (die Länge von Moduln ist in Aufgabe 2 definiert):

1. Zeigen Sie, dass $\ell_R\big(R/(p^n)\big) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Zeigen Sie mithilfe von ℓ_R: Sind $N, M, n_1, \dots, n_N, m_1, \dots, m_M \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_N \geq 1$ und $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_M \geq 1$ sowie
$$\bigoplus_{j=1}^{N} R/(p^{n_j}) \cong_R \bigoplus_{j=1}^{M} R/(p^{m_j}),$$
so folgt $N = M$ und $n_j = m_j$ für alle $j \in \{1, \dots, N = M\}$.
3. Folgern Sie daraus (und mit geeigneten Tensorproduktfunktoren) die Eindeutigkeitsaussage des Klassifikationssatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz II.2.5.15).

Aufgabe 4 (noethersche Potenzreihenringe)**.** Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass dann auch $R[\![T]\!]$ noethersch ist.
Hinweis. Betrachten Sie zu einem Ideal in $R[\![T]\!]$ die Koeffizienten der *niedrigsten* Potenzen. Verschieben Sie dann alle Sorgen ins Unendliche.

Bonusaufgabe (noethersche topologische Räume)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie noethersche topologische Räume definiert sind.
2. Zeigen Sie: Ist R ein noetherscher Ring, so ist $\operatorname{Spec} R$ bezüglich der Zariski-Topologie ein noetherscher Raum.

Abgabe bis zum 22. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 11 vom 22. Juni 2018

Aufgabe 1 (artinsche Ringe)**.** Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $\dim R \leq 2018$, so ist R artinsch.
2. Ist $R[T]$ artinsch, so ist R artinsch.

Aufgabe 2 (Primärzerlegung, geometrisch)**.** Bestimmen Sie eine minimale Primärzerlegung von $(Y - X^2, Y + X)$ in $\mathbb{C}[X, Y]$.
Hinweis. Denken Sie geometrisch! Und beweisen Sie dann algebraisch.

Aufgabe 3 (maximale Radikale)**.**

1. Sei R ein Ring und a ein Ideal. Zeigen Sie: Ist $\sqrt{a}$ ein maximales Ideal in R, so ist a bereits ein primäres Ideal in R.
2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass

   $$(X^2, X{\cdot}Y) = (X) \cap (X^2, X{\cdot}Y, Y) \quad \text{und} \quad (X^2, X{\cdot}Y) = (X) \cap (X^2, X{\cdot}Y, Y^2)$$

   minimale Primärzerlegungen von $(X^2, X \cdot Y)$ in $K[X, Y]$ sind.

Aufgabe 4 (nilpotente Nilradikale)**.** Sei R ein Ring. Ein Ideal $a \subset R$ ist *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $a^n = (0)$ gibt.

1. Zeigen Sie: Ist R noethersch, so ist das Nilradikal $\sqrt[R]{0}$ nilpotent.

   Hinweis. Das Nilradikal ist endlich erzeugt. Was passiert daher in hohen Potenzen von $\sqrt[R]{0}$?
2. Zeigen Sie: Ist R artinsch, so ist das Nilradikal $\sqrt[R]{0}$ nilpotent.

   Hinweis. Sei $a := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} (\sqrt[R]{0})^n$. Warum genügt es zu zeigen, dass $a = (0)$ ist? Nehmen Sie an, a wäre nicht das Nullideal und betrachten Sie dann die Menge M aller Ideale $b \subset R$ mit $a \cdot b \neq (0)$. Warum besitzt M ein bezüglich Inklusion minimales Element b ? Warum ist b von einem Element erzeugt? Was passiert mit diesem Element?

Bonusaufgabe (Gröbner-Basen)**.** Lesen Sie Anhang A.3 über Gröbner-Basen.

1. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Buchberger eine Gröbner-Basis des Ideals

   $$a := (X^3 - 2 \cdot X \cdot Y,\ X^2 \cdot Y - 2 \cdot Y^2 + X) \subset \mathbb{C}[X, Y]$$

   in $\mathbb{C}[X, Y]$.
2. Entscheiden Sie mithilfe dieser Gröbner-Basis, ob die folgenden Polynome in a liegen oder nicht:

   $$X^{2018} + 2018 \cdot X \cdot Y, \quad X^{2018} + Y^{2017}.$$

Abgabe bis zum 29. Juni 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 12 vom 29. Juni 2018

Aufgabe 1 (Homologie)**.** Sei R ein ninoko Ring, seien $C = (C_*, \partial_*)$ bzw. $C' = (C'_*, \partial'_*)$ Ketttenkomplexe von R-Linksmoduln und sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $C_n \cong_R C'_n$, so folgt $H_n(C) \cong_R H_n(C')$.
2. Ist $H_n(C) \cong_R H_n(C')$, so folgt $C_n \cong_R C'_n$.

Aufgabe 2 (Dedekind, geometrisch)**.**

1. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal m und Restklassenkörper $k := R/m$. Zeigen Sie, dass $\dim_k m/m^2 = 1$ gilt.
2. Folgern Sie: Der Ring $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^3 - X^2)]$ ist *kein* Dedekindring.

   Hinweis. Aufgabe 4 von Blatt 8.

Aufgabe 3 (Dedekind, algebraisch)**.** Bearbeiten Sie einen der beiden folgenden Aufgabenteile:

1. Sei R ein diskreter Bewertungsring und sei $x \in Q(R)$. Zeigen Sie: Wenn es ein normiertes Polynom $f \in R[T] \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0$ gibt, so ist $x \in R$.

   Hinweis. Ist $x \notin R$, so ist $1/x \in R$ (warum?). Wie hilft nun $f(x)$?
2. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ *kein* Dedekindring ist.

   Hinweis. Es ist $(2, 1 + \sqrt{5})$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ und den goldenen Schnitt sollte man immer im Auge behalten.

Aufgabe 4 (noethersch vs. artinsch)**.** Sei R ein Ring und es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und maximale Ideale $m_1, \dots, m_n \subset R$ mit $m_1 \cdot \dots \cdot m_n = (0)$. Zeigen Sie, dass R in dieser Situation genau dann noethersch ist, wenn R artinsch ist.

Hinweis. Betrachten Sie die R/m_j-Vektorräume $m_1 \cdot \dots \cdot m_{j-1}/m_1 \cdot \dots \cdot m_j$ und Kettenbedingungen von Untermoduln. Wie vererben sich diese Kettenbedingungen durch die einzelnen Stufen? Was hat die Dimension eines Vektorraums mit auf-/absteigenden Ketten von Untervektorräumen zu tun? Beginnen Sie im Zweifel mit kleinen Werten für n.

Bonusaufgabe (Gegenbeispielkonstruktionsmaschine)**.** Sei R ein Ring und sei M ein R-Modul. Dann liefern die komponentenweise Addition und

$$\begin{aligned}(R \times M) \times (R \times M) &\longrightarrow R \times M\\ \big((r, x), (r', x')\big) &\longrightarrow (r \cdot r', r \cdot x' + r' \cdot x)\end{aligned}$$

eine Ringstruktur auf $\widetilde{R} := R \times M$.

1. Wie sehen die Primideale von $\widetilde{R}$ aus?
2. Wann ist $\widetilde{R}$ noethersch?
3. Verwenden Sie diese Konstruktion, um einen nulldimensionalen Ring zu finden, der *nicht* noethersch ist.

Abgabe bis zum 6. Juli 2018, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 13 vom 6. Juli 2018

Aufgabe 1 (Homotopie)**.** Sei R ein ninoko Ring, seien $C = (C_*, \partial_*)$ bzw. $C' = (C'_*, \partial'_*)$ Kettenkomplexe von R-Linksmoduln und sei $f\colon C \longrightarrow C'$ eine Kettenabbildung. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $f_n\colon C_n \longrightarrow C'_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus.
2. Ist f eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $H_n(f)\colon H_n(C) \longrightarrow H_n(C')$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2 (Tensorprodukt von Kettenkomplexen)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei $M \in \mathsf{Mod}_R$.

1. Konstruieren Sie einen geeigneten Funktor $M \otimes_R \cdot : {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ (indem Sie gradweise das Tensorprodukt von Kettenmoduln und Randoperatoren bilden).
2. Zeigen Sie, dass dieser Funktor $M \otimes_R \cdot$ Kettenhomotopien auf Kettenhomotopien abbildet.

Aufgabe 3 (eine Charakterisierung von Projektivität)**.** Sei R ein ninoko Ring und sei P ein R-Linksmodul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der R-Modul P ist projektiv.
2. Der Funktor ${}_R\mathrm{Hom}(P, \cdot)\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ ist exakt.

Aufgabe 4 (Syzygy)**.**

1. Schlagen Sie die Bedeutung des Wortes „Syzygy“ nach.
2. Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass M eine projektive Auflösung (P, ε) besitzt, bei der für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Modul P_n endlich erzeugt ist.

Bonusaufgabe (algorithmische homologische Algebra)**.** Schreiben Sie (in einer Programmiersprache Ihrer Wahl) ein Programm, das die Homologie von (gradweise endlich erzeugten) Kettenkomplexen von $\mathbb{Z}$-Moduln berechnet. Überlegen Sie sich dazu zunächst, wie Sie Kettenkomplexe und die Ergebnisse überhaupt vernünftig repräsentieren können.

---

freiwillige Abgabe bis 13. Juli, 10:00, in die Briefkästen

Übungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 14 vom 13. Juli 2018

Aufgabe 1 (Tor)**.** Sei R ein ninoko Ring, $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ und $N \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist M projektiv, so ist $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.
2. Ist $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$, so ist M projektiv.

Aufgabe 2 (mehr Tor)**.** Wir betrachten die Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y] &\longrightarrow \mathbb{C}[X,Y]^2 \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \\ 1 &\longmapsto (X,-Y) \\ (f,g) &\longmapsto Y \cdot f + X \cdot g \end{aligned}$$

in ${}_{\mathbb{C}[X,Y]}\mathsf{Mod}$. Dabei fassen wir $\mathbb{C}$ via $\mathbb{C} \cong_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X,Y]/(X,Y)$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul auf und $\varepsilon\colon \mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}$ bezeichnet die zugehörige kanonische Projektion.

1. Zeigen Sie, dass die obige Sequenz eine projektive Auflösung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul ist und bestimmen Sie $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Gibt es eine kürzere projektive Auflösung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (lokal frei vs. projektiv)**.** Sei R ein Ring und sei M ein endlich präsentierter R-Modul, d.h. für ein geeignetes $d \in \mathbb{N}$ gibt es einen Epimorphismus $R^d \longrightarrow M$, dessen Kern endlich erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der R-Modul M ist projektiv.
2. Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ ist $M_p = R_p \otimes M$ ein freier R_p-Modul.

Aufgabe 4 (Atiyah-MacDonald)**.** Lösen Sie alle Übungsaufgaben im Buch *Introduction to Commutative Algebra* von M.F. Atiyah und I.G. MacDonald (Addison-Wesley Series in Mathematics, Westview Press, 1969).

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie so viele Fehler im Skript wie möglich!

---

keine Abgabe

C

Fingerübungen

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 0 vom 10. April 2018

Aufgabe 1 (Kategorien).

1. Wie würden Sie die Kategorie der endlichen Gruppen definieren?
2. Wie würden Sie die Kategorie der partiell geordneten Mengen definieren?
3. Wieviele sinnvolle Möglichkeiten für Kategorien metrischer Räume fallen Ihnen ein?
4. Falls Sie bereits Analysis II/III gehört haben: Wie würden Sie die Kategorie der Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ definieren? Wie würden Sie die Kategorie der messbaren Räume definieren?

Aufgabe 2 (Ringe).

1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ sind Ringe bezüglich der gewöhnlichen Addition/Multiplikation auf $\mathbb{Q}$?
   (a) $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{0\}$
   (b) $\{a/2^n \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
   (c) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$
2. Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
   (a) Ist $x \in R$ mit $x + 1 = x$, so folgt $x = 0$.
   (b) Ist $x \in R$ mit $x^2 = 0$, so folgt $x = 0$.
3. Sei R ein Ring. Wie ist der Polynomring $R[T]$ definiert?

Aufgabe 3 (Bibliothek). Wählen Sie fünf Bücher über Kategorientheorie aus und vergleichen Sie diese. Welches hat die zugänglichsten Beispiele? Welches enthält am „meisten“ Theorie? Welches ist am verständlichsten geschrieben? Welches enthält am meisten Übungsaufgaben?

Aufgabe 4 (Wiederholung). Wiederholen Sie die Grundbegriffe zu Ringen, Idealen und Moduln aus der Linearen Algebra I/II. Warum wurden in der Linearen Algebra II Ringe und Moduln behandelt?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 1 vom 17. April 2018

Aufgabe 1 (Ideale)**.**

1. Übersetzen Sie die Definitionen von Links-/Rechtsidealen und beidseitigen Idealen über Untermoduln in eine explizitere Beschreibung.

2. Geben Sie Beispiele für Linksideale in $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$, die keine beidseitigen Ideale sind.

Aufgabe 2 (Funktoren)**.** Liefern die folgenden Konstrukte Funktoren vom Typ $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$?

1. Auf Objekten: $V \longmapsto V$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto 0$

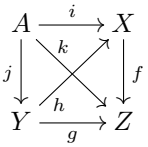
2. Auf Objekten: $V \longmapsto \{0\}$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto 0$

3. Auf Objekten: $V \longmapsto V$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto \mathrm{id}_V$

4. Auf Objekten: $V \longmapsto V$
   Auf Morphismen: $f \longmapsto 2018 \cdot f$

Aufgabe 3 (kommutative Diagramme)**.**

1. Welches Gleichungssystem ist zur Kommutativität des untenstehenden Diagramms äquivalent?



2. Wie kann man die Eigenschaft, dass eine Abbildung von Mengen selbstinvers ist, durch ein geeignetes kommutatives Diagramm beschreiben?

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie universelle Eigenschaften aus der Linearen Algebra I/II (Quotienten, direkte Summen, direkte Produkte, Tensorprodukte).

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 2 vom 24. April 2018

Aufgabe 1 ((Ko)Limiten in Set)**.** Sei X eine Menge. Wir betrachten die gewöhnliche Anordnung auf $\mathbb{N}$.

1. Was ist $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (bezüglich der Inklusionsabbildungen), wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilmengen in X ist?
2. Was ist $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (bezüglich der Inklusionsabbildungen), wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Teilmengen in X ist?

Aufgabe 2 ((Ko)Limiten über die leere Indexmenge)**.** Sei C eine Kategorie. Wir betrachten die leere (einzige!) partielle Ordnung auf $I := \emptyset$.

1. Geben Sie eine explizitere Formulierung dafür, was $\varinjlim_I$ in C erfüllt.
2. Geben Sie eine explizitere Formulierung dafür, was $\varprojlim_I$ in C erfüllt.
3. Existieren diese (Ko)Limiten in der Kategorie Ring ?
4. Existieren diese (Ko)Limiten in der Kategorie ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$?

Aufgabe 3 (Tensorprodukte)**.**

1. Sei R ein ninoko Ring, sei M ein R-Rechtsmodul, sei N ein R-Linksmodul und sei Z eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie: Ist $f\colon M \times N \longrightarrow Z$ eine R-balancierte Abbildung, so folgt
$$\forall_{n\in N} \quad f(0,n) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_{m\in M} \quad f(m,0) = 0.$$
2. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2018}$.
3. Was ist $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2018$?

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie Primideale, maximale Ideale, Restklassenringe aus der (Linearen) Algebra.
Hinweis. Falls Sie diese Begriffe aus der Linearen Algebra noch nicht kennen, ist das kein Problem; ich werde sie in der Vorlesung auch nochmal kurz wiederholen.

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 3 vom 1. Mai 2018

Aufgabe 1 (Tensorprodukt)**.** Bestimmen Sie möglichst einfache/explizite Darstellungen der folgenden Tensorprodukte:

1. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5) \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$
2. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/25) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10$
3. $\mathbb{Q}[T]/(T^2) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T+1)$
4. $\mathbb{Q}[T]/(T^2-1) \otimes_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T+1)$
5. $\mathbb{Z}[X,Y]/(2017, X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}[X,Y]} \mathbb{Z}[X,Y]/(X+1)$
6. $\mathbb{Z}[X,Y]/(2017, X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}[X,Y]} \mathbb{Z}[X,Y]/(X)$

Aufgabe 2 (Bibliothek)**.** Wählen Sie fünf Bücher über Kommutative Algebra aus und vergleichen Sie diese. Welches hat die schönsten Beispiele? Welches erklärt die Bedeutung der einzelnen Resultate am besten? Welche behandeln auch algorithmische Aspekte? Welche verwenden den Formalismus der Kategorientheorie? Welche Teilgebiete der Kommutativen Algebra werden abgedeckt? Welches enthält die meisten Übungsaufgaben?

Aufgabe 3 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 1.1–1.4 (Kategorientheorie); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Kategorien, Funktoren, natürliche Transformationen? Wozu verwendet man diese?
2. Welche Beispiele für diese Begriffe kennen Sie?
3. Versuchen Sie, auch in anderen Vorlesungen Beispiele dafür zu finden!
4. Was sind Kolimiten/inverse Limiten? Wie arbeitet man damit? Welche Beispiele kennen Sie dafür? Welche Funktoren sind mit (Ko)Limiten verträglich?

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 1.5 (Tensorprodukt); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Welche universelle Eigenschaft besitzt das Tensorprodukt von Moduln?
2. Wie konstruiert man das Tensorprodukt von Moduln?
3. Welche grundlegenden Eigenschaften besitzt das Tensorprodukt? Wie kann man effizient damit rechnen? Wie hilft die Kategorientheorie dabei?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Alles, was Sie jetzt sicher beherrschen, müssen Sie nicht mühsam vor der Klausur unter Zeitdruck lernen …

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 4 vom 8. Mai 2018

Aufgabe 1 (Primspektren)**.** Wieviele Punkte enthalten die folgenden Primspektren? Welche der Punkte sind abgeschlossen in der Zariski-Topologie?

1. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/(2018)$
2. $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[T]/(T^2 + T)$
3. $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]/(T^2 + 1)$
4. $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[T]/(T^2 + 1)$
5. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(4)$
6. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/(9) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(99)$

Aufgabe 2 (induzierte Abbildungen auf Primspektren)**.** Sei $i \colon \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ die kanonische Inklusion und sei $\operatorname{Spec}(i) \colon \operatorname{Spec} \mathbb{C}[T] \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]$ die induzierte Abbildung.

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spec}(i)\big((T + i)\big) = (T^2 + 1)$.
2. Was ist $\operatorname{Spec}(i)\big((T - i)\big)$?
3. Was ist $\operatorname{Spec}(i)\big((T - 2)\big)$?
4. Gibt es ein $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[T]$ mit $\operatorname{Spec}(i)(p) = (T^2 + 2018)$?
5. Was ist $\operatorname{Spec}(i)\big((T - \zeta_3)\big)$? (falls Sie Algebra bereits gehört haben)

Aufgabe 3 (affine algebraische Mengen)**.** Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ (von Hand oder mithilfe eines Computer-Algebra-Systems):

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2 \cdot y^2 = 3\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \cdot y^2 = 1\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\}$
5. Erinnern Sie sich eigentlich noch an die Hauptachsentransformation?!

Aufgabe 4 (etc.)**.** Formulieren und lösen Sie weitere Aufgaben vom selben Typ!

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 5 vom 15. Mai 2018

Aufgabe 1 (Koordinatenringe)**.** Überlegen Sie sich für jedes der folgenden Polynome f: Wie sieht $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f)$ aus? Was ist $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f))$? Was ist $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$?

1. $X \in \mathbb{R}[X]$
2. $X \in \mathbb{R}[X, Y]$
3. $X^2 \in \mathbb{R}[X]$
4. $X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$
5. $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$
6. $X^2 + Y \in \mathbb{R}[X, Y]$
7. $X^2 \cdot (X^2 + Y)^3 \in \mathbb{R}[X, Y]$

Hinweis. Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, so ist $K[X_1, \ldots, X_n]$ faktoriell (Satz von Gauß, Satz III.2.2.40).

Aufgabe 2 (Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden affinen algebraischen Mengen $V \subset \mathbb{C}^2$ jeweils zwei Punkte in V. Wie erhält man daraus maximale Ideale von $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[V]$?

1. $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X^2 - Y)$
2. $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(Y^2 - X^2 - X^3)$

Aufgabe 3 (Jacobson-Radikale)**.** Berechnen Sie für die folgenden Ringe das Jacobson-Radikal:

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/(2018)$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}[T]$
5. $\mathbb{Z}/(9)$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 2.1–2.2 (Das Primspektrum, Affine algebraische Geometrie); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Primideale/maximale Ideale? Wozu sind sie gut?
2. Welche grundlegenden Eigenschaften besitzt das Primspektrum?
3. Welche geometrischen Interpretationen des Maximalspektrums kennen Sie?
4. Allgemeiner: Wie korrespondieren geometrische zu algebraischen Eigenschaften?
5. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 6 vom 22. Mai 2018

Aufgabe 1 (Koordinatenringe). Sei $f := Y^2 - X^3 + X \in \mathbb{R}[X, Y]$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie einen Punkt in $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)$ an.
3. Bestimmen Sie $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$.
4. Geben Sie zwei verschiedene Primideale in $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$ an.
5. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbf{K}_{\mathbb{C}}[\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f)]$.

Aufgabe 2 (Quiz zu Kapitel 1). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. In jeder nicht-leeren Kategorie gibt es mindestens einen Isomorphismus.
2. Die Funktoren $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot\,, \mathbb{R})$ und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot\,, \mathbb{R})\colon {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ sind natürlich isomorph.
3. In der Kategorie der endlichen Gruppen existieren alle inversen Limiten.
4. Für alle $\mathbb{Z}$-Moduln M, M', N mit $M \cong_{\mathbb{Z}} M'$ gilt $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong_{\mathbb{C}} M' \otimes_{\mathbb{Z}} N$.
5. Für alle $\mathbb{Z}$-Moduln M, M', N mit $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong_{\mathbb{Z}} M' \otimes_{\mathbb{Z}} N$ gilt $M \cong_{\mathbb{Z}} M'$ oder $N \cong_{\mathbb{Z}} \{0\}$.

Aufgabe 3 (Quiz zu Kapitel 2). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. $|\operatorname{Spec}\mathbb{R}| = |\operatorname{Spec}\mathbb{F}_2|$
2. $|\operatorname{Spec}\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\operatorname{Spec}\mathbb{Z}/(2018)|$
3. $|\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[T]| = |\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[T]/(T^3 - T)|$
4. Für alle affinen algebraischen Mengen $V \subset \mathbb{C}^5$ ist $\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(\mathbf{I}_{\mathbb{C}}(V))) = \mathbf{I}_{\mathbb{C}}(V)$.
5. $\dim \mathbb{Z}[T] = \dim \mathbb{Z}/(2017)[T]$
6. $\dim \mathbb{Z}[T] = \dim \mathbb{Z}/(2018)[T]$
7. $\dim \mathbb{F}_2[X, Y, Z] = \dim \mathbb{Z}[X, Y, Z]$
8. Bezüglich der Zariski-Topologie ist $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist kompakt.

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 2.3 (Dimension); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Wie ist die Dimension eines Rings definiert?
2. Wie passt der Dimensionsbegriff mit der naiven Anschauung zusammen?
3. Was sind grundlegende Eigenschaften der Dimension von Ringen?
4. Welche Berechnungsmethoden für die Dimension kennen Sie?
5. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 7 vom 29. Mai 2018

Aufgabe 1 (lokale Ringe). Welche der folgenden Ringe sind lokal?

1. $\mathbb{Z}/(5)$
2. $\mathbb{Z}/(25)$
3. $\mathbb{Z}/(55)$
4. $\mathbb{Z}/(125)$
5. $\mathbb{Z}_{(5)}$
6. $\mathbb{Z}_5$

Aufgabe 2 (Lokalisierungen). Welche linke Seite passt zu welcher rechten Seite?

$\mathbb{Z}_5$	$\left\{\sum_{j=-n}^{n} a_j \cdot T^j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_{-n}, \dots, a_n \in \mathbb{F}_5\right\}$
$\mathbb{F}_5[T]_{(T)}$	$\{0\}$
$\mathbb{F}_5[T]_T$	$\left\{\frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b\right\}$
$\mathbb{Z}_{(5)}$	$\left\{\frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{F}_5[T], g(0) \neq 0\right\}$
$(\mathbb{F}_5[T] \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{F}_5[T]$	$\left\{\frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad b = 5^n\right\}$
$(5 \cdot \mathbb{Z} \cup \{1\})^{-1}\mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_5(T)$

Aufgabe 3 (Exaktheit). Welche der folgenden Funktoren sind exakt?

1. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod}$
2. $\mathbb{Q}[T] \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod}$
3. $\mathbb{F}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{F}_5}\mathsf{Mod}$
4. $\mathbb{F}_5 \otimes_{\mathbb{F}_5} \cdot : {}_{\mathbb{F}_5}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{F}_5}\mathsf{Mod}$
5. $\mathbb{Z}_{(5)} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}_{(5)}}\mathsf{Mod}$
6. $\mathbb{Z}/(55) \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}/(55)}\mathsf{Mod}$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 3.1 (Lokale Ringe) und 3.2 (Lokalisierung von Ringen und Moduln); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind lokale Ringe? Was ist Lokalisierung?
2. Wie passen Lokalisierungen/lokale Ringe mit der Anschauung zusammen?
3. Was sind grundlegende Eigenschaften von lokalen Ringen/Lokalisierungen?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 8 vom 5. Juni 2018

Aufgabe 1 (Primspektren)**.** Beschreiben Sie das Primspektrum der folgenden Ringe möglichst explizit.

1. $\mathbb{Z}_{(5)}$
2. $\mathbb{Z}_5$
3. $\left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b, 11 \nmid b\right\}$
4. $\big((\mathbb{Z}[T]/(T^{2018} + 2018))_{[T]}\big)_{[T]/1}$

Aufgabe 2 (Dimension)**.** Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Ringe.

1. $\mathbb{Z}_{(5)}$
2. $\left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, 5 \nmid b, 11 \nmid b\right\}$
3. $\mathbb{Z}[T]_T$
4. $\mathbb{Z}[T]_{(T)}$
5. $\mathbb{Z}[T]_{(2)}$
6. $\mathbb{Z}[T]_{(2,T)}$

Aufgabe 3 (lokale Trivialität)**.** Geben Sie für jeden der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln M jeweils ein $q \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ mit $M_q \ncong_{\mathbb{Z}_q} \{0\}$ an.

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/(2)$
3. $\mathbb{Z}/(2018)$
4. $\mathbb{Q}$
5. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$
6. $\mathbb{Z}[T]/(T^2 + 1)$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 3.3 (Lokalisierung und das Primspektrum) und 3.4 (Lokale Eigenschaften); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Wie kann man Primspektren von Lokalisierungen beschreiben?
2. Wie kann man Lokalisierungen verwenden, um Dimensionen zu berechnen?
3. Was sind lokale Eigenschaften von Moduln?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 9 vom 12. Juni 2018

Aufgabe 1 (adische Gleichungen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}_{[\![3]\!]}$ mit $x^2 = 2$.
2. Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}_{[\![7]\!]}$ mit $x^2 = 2$.
3. Es gibt ein $f \in \mathbb{Z}[\![T]\!]$ mit $f \cdot (1 - T) = 1$.
4. Es gibt ein $f \in \mathbb{Z}[\![T]\!]$ mit $f \cdot (2 - T) = 1$.
5. Es gibt ein $f \in \mathbb{Q}[\![T]\!]$ mit $f^3 = T + 1$.

Aufgabe 2 (Quiz zu Kapitel 3)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist R ein Ring und $a \subset R$ ein Ideal, so ist a multiplikativ abgeschlossen.
2. Ist R ein Ring, ist $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und sind M und N Moduln über R mit $L_S M \cong_{S^{-1}R} L_S N$, so gilt $M \cong_R N$.
3. Ist R ein Ring und $p \in \operatorname{Spec} R$, so gilt $\dim R = \dim R_p$.
4. Nach dem Lemma von Nakayama ist jeder Modul über einem lokalen Ring endlich erzeugt.
5. Jeder Körper ist ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul.
6. Jeder freie Modul ist lokal frei.
7. Der Ring $\mathbb{Z}[T]$ ist (T)-adisch vollständig.

Aufgabe 3 (noethersche Ringe)**.** Welche der folgenden Ringe sind noethersch?

1. $\mathbb{Z}/(42)$
2. $\mathbb{Q}[T]/(T^2 - 1)$
3. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$
5. $\mathbb{C}[T]_{T^2+2018}$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 3.5 (Vervollständigung); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Wie ist die adische Vervollständigung definiert?
2. Was sind die grundlegenden Eigenschaften adischer Vervollständigungen?
3. Wie kann man das Henselsche Lemma verwenden, um „interessante“ Elemente zu konstruieren?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Wiederholen Sie bei dieser Gelegenheit auch nochmal Kolimiten und inverse Limiten!

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 10 vom 19. Juni 2018

Aufgabe 1 (noethersche Ringe). Welche der folgenden Ringe sind noethersch?

1. $\mathbb{Z}[X,Y,Z]_{(X,Y)}$
2. $\mathbb{Z}[X_0,X_1,X_2,\dots]/(X_0,X_1,X_2,\dots)$
3. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$
4. $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(Y^2-X^2-X^3)$

Aufgabe 2 (Moduln vs. Algebren). Welche der folgenden Ringe sind endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln? Welche sind endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebren? Welche sind noethersch?

1. $\mathbb{Z}/(2018)$
2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}[T]$
4. $\mathbb{Z}[T]/(T^2+1)$
5. $\mathbb{Z}[X_0,X_1,X_2,\dots]$
6. $\mathbb{Z}[\![T]\!]$
7. $\mathbb{Q}$
8. $\mathbb{Z}_5$

Aufgabe 3 (primäre Ideale). Welche der folgenden Ideale sind primär?

1. (42) in $\mathbb{Z}$
2. (121) in $\mathbb{Q}$
3. (T^{2018}) in $\mathbb{R}[T]$
4. (T^2-1) in $\mathbb{R}[T]$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung). Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 4.1 und 4.2 (Noethersche Ringe und Moduln, Der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind noethersche Ringe?
2. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben noethersche Ringe bzw. Moduln/Algebren über noetherschen Ringen?
3. Wie beweist man den Hilbertschen Basissatz? Wie beweist man den Hilbertschen Nullstellensatz?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Wiederholen Sie bei dieser Gelegenheit auch nochmal die Klassifikation der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen!

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 11 vom 26. Juni 2018

Aufgabe 1 (Noether, Artin und Dedekind)**.** Welche der folgenden Ringe sind noethersch? Artinsch? Dedekindsch?

1. $\mathbb{Z}/(2018)$
2. $\mathbb{Q}[X, Y]$
3. $\mathbb{Z}[X, Y]/(Y - X^2)$
4. $\mathbb{Z}_{(5)}[T]$
5. $\mathbb{Z}_{(5)}$

Aufgabe 2 (diskrete Bewertungsringe)**.** Welche der folgenden Ringe sind diskrete Bewertungsringe?

1. $\mathbb{R}[T]/(T^2 + 2018)$
2. $\mathbb{R}[T]_{(T^2+2018)}$
3. $\mathbb{Z}_{(5)} \times \mathbb{Z}_{(2017)}$
4. $\mathbb{Z}_{2017}$

Aufgabe 3 (Quiz zu Kapitel 4)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist R ein Ring, der ein endlich erzeugtes Ideal enthält, so ist R noethersch.
2. Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch $R[X, Y]$ noethersch.
3. Ist R ein noetherscher Ring, so ist nach dem Artin-Tate-Lemma jede endlich erzeugte R-Algebra auch als R-Modul endlich erzeugt.
4. Ist R ein noetherscher Ring, so ist ein Ideal $q \subset R$ genau dann primär, wenn $\sqrt{q}$ maximal ist.
5. Ist R ein artinscher Ring, so besitzt jedes Ideal von R eine Primärzerlegung.
6. Ist R ein Dedekindring, so ist auch $R[T]$ ein Dedekindring.

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 4.3, 4.4, 4.5 (Primärzerlegung, artinsche Ringe, Dedekindringe); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Primärzerlegungen? Wann existieren sie? Wie eindeutig sind sie?
2. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben artinsche Ringe?
3. Welche Charakterisierungen und (Vererbungs-)Eigenschaften haben Dedekindringe?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein? Wozu sind diese Begriffe gut?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 12 vom 3. Juli 2018

Aufgabe 1 (Ketten, Zykel, Ränder, Homologie)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Kettenkomplexe von $\mathbb{Z}$-Moduln alle Zykel und Ränder sowie die Homologie.

1. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2018} \mathbb{Z}$
2. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$
3. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}^2$
4. $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4$

Aufgabe 2 (Kettenabbildungen)**.** Zwischen welchen der Kettenkomplexe aus Aufgabe 1 gibt es Kettenabbildungen, die in Homologie *nicht* in jedem Grad die Nullabbildung induzieren?

Aufgabe 3 (Projektivität)**.** Welche der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln sind projektiv?

1. $\mathbb{Z}/2018 \oplus \mathbb{Z}/2017$
2. $\mathbb{Z}[T]$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Z}^{2018}$

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 5.1 (Kettenkomplexe und Homologie); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind Ketten, Zykel, Ränder? Warum heißen sie so?
2. Was ist die Homologie eines Kettenkomplexes? Wozu braucht man sie?
3. Welche Techniken kennen Sie, um Homologiegruppen zu berechnen?
4. Was sind Kettenabbildungen, Kettenhomotopien? Wie interagieren sie mit Homologie?
5. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?

Wiederholen Sie bei dieser Gelegenheit auch nochmal den Algorithmus von Gauß und die Smith-Normalform.

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — Blatt 13 vom 10. Juli 2018

Aufgabe 1 (projektive Auflösungen)**.** Geben Sie jeweils mindestens zwei nichtisomorphe projektive Auflösungen an!

1. von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.
2. von $\mathbb{Z}/2$ als $\mathbb{Z}$-Modul.
3. von $\mathbb{Z}[T]/(T)$ als $\mathbb{Z}[T]$-Modul.
4. von $\mathbb{Z}[T]$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 2 (Tor)**.** Beschreiben Sie die folgenden Moduln möglichst explizit!

1. $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2018, \mathbb{Z}/2019)$
2. $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{R}}\big(C([0,1],\mathbb{R}), C([0,1],\mathbb{R})\big)$
3. $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{C}[X,Y]}\big(\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2), \mathbb{C}[X,Y]\big)$
4. $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Q}[T]}\big(\mathbb{Q}[T]/(T^2 + T^5) \oplus \mathbb{Q}[T]/(T+1), \mathbb{Q}[T]/(T)\big)$
5. $\operatorname{Tor}_2^{\mathbb{Q}[T]}\big(\mathbb{Q}(T), \mathbb{Q}[T] \oplus \mathbb{Q}[T]/(T^{2018})\big)$
6. $\operatorname{Tor}_2^{\mathbb{Z}[T]}\big(\mathbb{Z}[T]/(2, T^2 + T + 1), \mathbb{Z}[T]/(T)\big)$

Aufgabe 3 (Bibliothek)**.** Wählen Sie fünf Bücher über Homologische Algebra aus und vergleichen Sie diese. Welches hat die schönsten Beispiele? Welches erklärt die Bedeutung der einzelnen Resultate am besten? Welche behandeln auch algorithmische Aspekte? Welche arbeiten mit Modulkategorien? Welche in abelschen Kategorien? Welche verwenden simpliziale Methoden? Welche gehen auf Anwendungen der Homologischen Algebra in anderen Gebieten ein? Welches enthält die meisten Übungsaufgaben?

Aufgabe 4 (Zusammenfassung)**.** Schreiben Sie eine Zusammenfassung von Kapitel 5.2 und 5.3 (Projektive Auflösugen; Tor); orientieren Sie sich dabei an den folgenden Fragen:

1. Was sind projektive Moduln? Was sind projektive Auflösungen?
2. Wie geht die Projektivität im Fundamentalsatz der homologischen Algebra ein?
3. Was ist Tor ? Wie kann man Tor beschreiben/konstruieren/berechnen?
4. Welche Beispiele fallen Ihnen ein?
5. Wozu betrachtet man Tor ?

---

keine Abgabe!

D
Allgemeine Hinweise

Kommutative Algebra im SS 2018
Organisatorisches

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser April 2018

Homepage. Alle aktuellen Informationen zur Vorlesung, zu den Übungen, zu Sprechstunden, Literaturangaben, sowie die Übungsblätter finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung bzw. in GRIPS:

http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/calgebra_ss18

https://elearning.uni-regensburg.de

Vorlesung. Die Vorlesung findet jeweils dienstags (10:15–12:00; H 31) und freitags (10:15–12:00; H 31) statt.

Es wird ein (Kurz)Skript zur Vorlesung geben, das eine Übersicht über die wichtigsten Themen der Vorlesung enthält. Dieses Skript wird jeweils auf den obigen Homepages aktualisiert. Beachten Sie bitte, dass dieses Skript keineswegs geeignet ist, den Besuch der Vorlesung, der Zentralübung oder der Übungen zu ersetzen!

Übungen. Die neuen Übungsaufgaben werden wöchentlich freitags spätestens um 10:00 Uhr auf den obigen Homepages online gestellt und sind bis zum Freitag eine Woche später um 10:00 Uhr in die entsprechenden Briefkästen in der Mathematik abzugeben.

Auf jedem Übungsblatt gibt es vier reguläre Aufgaben (je 4 Punkte) und herausforderndere Bonusaufgaben (je 4 Bonuspunkte).

Sie dürfen (und sollen) die Aufgaben in kleinen Gruppen bearbeiten; aber die Lösungen müssen individuell ausformuliert und aufgeschrieben werden (andernfalls werden die Punkte aberkannt). Sie dürfen (müssen aber nicht!) Lösungen zu zweit abgeben; in diesem Fall müssen selbstverständlich jeweils beide Autoren in der Lage sein, *alle* der Zweiergruppe abgegebenen Lösungen an der Tafel zu präsentieren (andernfalls werden die Punkte aberkannt).

Die Übungen beginnen in der zweiten Vorlesungswoche; in diesen ersten Übungen wird Blatt 0 besprochen.

Außerdem werden wir auf der Homepage Fingerübungen anbieten, mit denen grundlegende Begriffe, Handgriffe und Rechentechniken eingeübt werden können. Diese Aufgaben werden nicht abgegeben bzw. korrigiert.

Einteilung in die Übungsgruppen. Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt über GRIPS:

https://elearning.uni-regensburg.de

Sie können sich bis Mittwoch, den 11. April 2018, um 10:00 Uhr für die Übungen anmelden; Sie können dort Ihre Präferenzen für die

Übungstermine auswählen und wir werden versuchen, diese Wünsche zu erfüllen. Bitte beachten Sie jedoch, dass es sein kann, dass wir nicht alle Wünsche erfüllen können.

Falls Sie noch keine Kennung des Rechenzentrums haben, wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser.

Die endgültige Einteilung der Übungsgruppen wird spätestens am Freitag, den 13. April 2018, in GRIPS bekanntgegeben. Ein Wechsel in volle Übungsgruppen ist dann nur durch Tausch mit einem Tauschpartner möglich.

Bei Fragen zur Einteilung der Übungsgruppen und zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser (daniel.fauser@ur.de).

Leistungsnachweise. Diese Vorlesung kann wie in den einzelnen Modulkatalogen spezifiziert in die Studiengänge eingebracht werden.

- *Studienleistung*: Regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen, mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte, mindestens einmal zufriedenstellend vorrechnen.
- *Prüfungsleistung (für den Leistungsnachweis zur Kommutativen Algebra)*: Zweistündige Klausur (s.u.). Die Modulnote ergibt sich wie im jeweiligen Modulkatalog angegeben.

Klausur. Die Klausur findet am Montag, den 16. Juli 2018, von 9:00 bis 11:00 Uhr, statt. Die Wiederholungsklausur ist voraussichtlich am Ende der Semesterferien; der genaue Termin wird so bald wie möglich bekanntgegeben. Die Wiederholungsklausur kann auch als Erstversuch geschrieben werden; diese Option ist nur in Einzelfällen sinnvoll: der nächste Wiederholungstermin ist dann erst ein Jahr später im Rahmen der nächsten Vorlesung zur Kommutativen Algebra.

Sie müssen sich in FlexNow für die Studienleistung und die Prüfungsleistung anmelden. Bitte informieren Sie sich frühzeitig. Wir werden rechtzeitig Einträge in FlexNow vorbereiten. Berücksichtigen Sie bitte auch (implizite) Fristen der entsprechenden Prüfungsordnungen bis wann (Wiederholungs-)Prüfungen abgelegt werden müssen.

Wichtige Informationen im Krankheitsfall finden Sie unter:

http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/studierende-und-studienanfaenger/index.html

Hinweise für Wiederholer. Studenten, die bereits in einem vorangegangenen Semester die Klausurzulassung erhalten haben, aber im entsprechenden Semester die Klausur nicht bestanden haben oder nicht an der Klausur teilgenommen haben, können mit dieser Zulassung auch an den oben genannten Klausurterminen teilnehmen. Informieren Sie sich rechtzeitig über den Stoffumfang dieser Vorlesung (z.B. über das Kurzskript). Außerdem kann es je nach Kenntnisstand sinnvoll sein, nochmal an den Übungen oder der Vorlesung teilzunehmen.

Für den Drittversuch besteht alternativ zur Klausur auch wahlweise die Möglichkeit, die Prüfung als mündliche Prüfung abzulegen.

Falls Sie an den Übungen teilnehmen möchten, ohne dass Ihre Lösungen korrigiert werden sollen, schreiben Sie bitte eine email an Daniel Fauser mit Ihren Wunschterminen (damit die Übungsgruppen einigermaßen gleichmäßig besucht sind).

Ansprechpartner.

- Bei Fragen zur Organisation des Übungsbetriebs wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser (Büro M 205):

  daniel.fauser@ur.de

- Bei Fragen zu den Übungsaufgaben wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter oder an Daniel Fauser.
- Bei mathematischen Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter, an Daniel Fauser oder an Clara Löh.
- Bei Fragen zur Planung Ihres Studiums bzw. zur Prüfungsordnung wenden Sie sich bitte an die zuständige Studienberatung oder das zuständige Prüfungsamt:

http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/ansprechpersonen/index.html

Bei vielen Fragen kann Ihnen auch die Fachschaft weiterhelfen:

http://www-cgi.uni-regensburg.de/Studentisches/FS_MathePhysik/cmsms/

Kommutative Algebra im SS 2018
Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser April 2018

Ziel der Prüfungsvorbereitung. Hauptziel der Prüfungsvorbereitung ist die souveräne Beherrschung des behandelten Fachgebiets. Die Prüfung sichert ab, dass dies tatsächlich der Fall ist, ist aber nicht das eigentliche inhaltliche Ziel der Vorlesung.

Beherrscht werden sollten also:

- aktive Kenntnis der Fachbegriffe und Formalisierungsmethoden
- Verständnis der Ideen, die zu diesen Fachbegriffen und Formalisierungen führen
- wichtige Probleme und Fragestellungen, die das Gebiet maßgeblich beeinflusst haben bzw. die durch das Gebiet gelöst werden können
- wichtige Resultate und Zusammenhänge innerhalb des Gebiets
- wichtige Beweis- und Lösungsstrategien
- repräsentative Beispiele
- Anwendungen des Gebiets und Interaktion mit anderen Gebieten
- Fähigkeit, auf all diesen Kenntnissen weiter aufzubauen.

Erreichen dieses Ziels. Während der Vorlesungszeit:

- aktive Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben
- Erlernen des Fachwissens (Definitionen, Sätze), notfalls mit Karteikarten
- weiteres aktives Üben mit zusätzlichen Aufgaben und Vertiefung der Kenntnisse durch Selbststudium (Bibliothek!)
- Bei Fragen: Betreuungsangebote nutzen!

Kurz vor der Prüfung:

- Kann ich mein Wissen präzise und verständlich präsentieren? (Das kann man einfach an anderen Kommilitonen ausprobieren ...)
- Was könnten typische Prüfungsfragen sein? Was sind gute Lösungen zu diesen Fragen?
- Wie belastbar sind meine Fähigkeiten? Was muss ich noch verbessern?

Bewertungskriterien. In der Prüfung werden folgende Fähigkeiten abgeprüft:

- Fachwissen (Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, Anschauung, Zusammenhänge, Anwendungen, ...)
- präzises und korrektes, logisch schlüssiges, Formulieren und Argumentieren
- Lösen von Standardproblemen
- Kreativität bei der Lösung von Problemen

Viel Erfolg bei der Prüfung!

Kommutative Algebra im SS 2018
Hinweise zu den Übungsaufgaben

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser April 2018

Ziel der Übungsaufgaben. Ziel der Übungsaufgaben ist, sich aktiv mit den behandelten Definitionen, Sätzen, Beispielen und Beweistechniken auseinanderzusetzen und zu lernen, damit umzugehen.

Das Punkteminimum für die Studienleistung ist das *Minimum*. Sie sollten versuchen, möglichst viele Punkte zu erreichen und nicht nach Erreichen dieser Minimalzahl die Übungen schleifen lassen!

Wie bearbeitet man eine Übungsaufgabe?

- Beginnen Sie mit der Bearbeitung an dem Tag, an dem das Übungsblatt erscheint – manche Dinge brauchen einfach ein paar Tage Zeit.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben gründlich durch. Kennen Sie alle auftretenden Begriffe? Verstehen Sie, was in den Aufgaben verlangt wird?
- Was sind die Voraussetzungen? Was ist zu zeigen? Wie könnten diese Dinge zusammenhängen? Gibt es Sätze aus der Vorlesung, die auf diese Situation passen?
- Welche Lösungsstrategien bzw. Beweisstrategien passen auf die Aufgabe? Kann man einfach direkt mit den Definitionen arbeiten und so zum Ziel gelangen?
- Ist die Aufgabe plausibel? Versuchen Sie die behaupteten Aussagen, an einfachen Beispielen nachzuvollziehen!
- Falls Sie die Aufgabe unplausibel finden, können Sie versuchen, sie zu widerlegen und untersuchen, woran dieses Vorhaben scheitert.
- Kann man die Situation durch eine geeignete Skizze graphisch darstellen?
- Versuchen Sie, das Problem in kleinere Teilprobleme aufzuteilen. Können Sie diese Teilprobleme lösen?
- Verwenden Sie viel Schmierpapier und geben Sie sich genug Zeit, an der Aufgabe herumzuexperimentieren! Selbst wenn Sie die Aufgabe nicht vollständig lösen, werden Sie auf diese Weise viel lernen, da Sie sich aktiv mit den Begriffen und Sätzen auseinandersetzen.
- Wenn Sie nicht weiterwissen, diskutieren Sie die Aufgabe mit Kommilitonen. Lassen Sie sich aber auf keinen Fall dazu verleiten, einfach Lösungen irgendwo abzuschreiben oder ausschließlich in Gruppen zu arbeiten. Mathematik kann man nur lernen, wenn man aktiv damit arbeitet und seine Gedanken selbst formuliert!

Wie schreibt man eine Lösung auf?

- Gliedern Sie Ihre Lösung sauber in Voraussetzung, Behauptung und Beweis.

- Teilen Sie Ihre Beweise in sinnvolle Zwischenschritte auf.
- Achten Sie darauf, dass Sie verständlich formulieren und dass die Argumente logisch aufeinander aufbauen.
- Ist Ihre Argumentationskette wirklich lückenlos? Seien Sie misstrauisch gegenüber Ihrer eigenen Lösung und versuchen Sie, alle potentiellen Schwachpunkte ausfindig zu machen!
- Wenn Sie einzelne Beweisschritte nicht vollständig durchführen können, können Sie in Ihrer Lösung darauf hinweisen – die restliche Lösung kann trotzdem Punkte erhalten!
- Achten Sie darauf, dass Sie alle Bezeichner einführen und dass Sie mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt verwenden.
- Versuchen Sie, sich so präzise wie möglich auszudrücken!
- Versuchen Sie, indirekte Argumente so weit wie möglich zu vermeiden.
- Überprüfen Sie am Ende, ob Sie wirklich das bewiesen haben, was Sie ursprünglich behauptet haben.
- Oft ist es auch hilfreich zu überprüfen, ob/wie alle in der Aufgabe gegebenen Voraussetzungen verwendet wurden.
- Würden Sie Ihre Lösung verstehen, wenn Sie sie zum ersten Mal lesen würden?
- Alles, was Sie abgeben, müssen Sie eigenständig formuliert und auch verstanden haben.
- Geben Sie Literaturangaben an, wenn Sie zusätzliche Quellen verwendet haben.

Bewertungskriterien. Bei der Bewertung der abgegebenen Lösungen wird auf folgendes geachtet:

- Wurde die gestellte Aufgabe vollständig gelöst?
- Wurden Voraussetzung, Behauptung, Beweis deutlich voneinander getrennt?
- Stimmen die Voraussetzungen? Sind sie sauber formuliert?
- Stimmen die Behauptungen/Zwischenbehauptungen? Sind sie sauber formuliert?
- Ist die Argumentationskette der Beweisschritte vollständig?
- Sind die Beweisschritte präzise formuliert und verständlich?
- Sind alle Bezeichner eingeführt?
- Werden mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt eingesetzt?
- Ist an jeder Stelle des Beweises klar, was passiert?
- Werden die neu erlernten Begriffe und Techniken passend eingesetzt?

Viel Erfolg und viel Spass bei den Übungen!

Literaturverzeichnis

Bitte beachten Sie, dass das Literaturverzeichnis im Laufe der Vorlesung wachsen wird und sich daher auch die Nummern der Quellen ändern werden!

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, dritte Auflage, Springer, 2004. Zitiert auf Seite:

[2] Michael F. Atiyah, Ian G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Westview Press, 1969. Zitiert auf Seite: 118, 141, 142, 143, 148

[3] Martin Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie: Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen*, Springer Spektrum, 2015. Zitiert auf Seite: 6

[4] Keith Conrad. *Tensor Products*, http://www.math.uconn.edu/∼kconrad/blurbs/linmultialg/tensorprod.pdf Zitiert auf Seite: 39

[5] Thierry Coquand, Henri Lombardi. A short proof of the Krull dimension of a polynomial ring, *Amer. Math. Monthly*, 112(9), S. 826–829, 2005. Zitiert auf Seite: 80

[6] David A. Cox, John Little, Donal O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, vierte Auflage, Springer, 2015. Zitiert auf Seite: 64, A.8, A.10, A.11

[7] Klaus Jänich. *Topologie*, 6. Auflage, Springer, 1999. Zitiert auf Seite: 53

[8] Clara Löh. *Geometric Group Theory. An Introduction*, Universitext, Springer, 2018. Zitiert auf Seite: 127

[9] Clara Löh. *Algebra*, Skript zur Vorlesung, 2018. http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/algebra_ws1718/lecture_notes.pdf Zitiert auf Seite: 68, 127

[10] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998. Zitiert auf Seite: 6

[11] Michael Spivak. *Calculus*, dritte Auflage, Cambridge University Press, 2006. Zitiert auf Seite: 81

[12] Christopher Tuffley. *A year in the life of Sammy the Graduate Student*, http://www.massey.ac.nz/∼ctuffley/sammy/yearinthelife1.html Zitiert auf Seite: 61

[13] Charles Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38, Cambridge University Press, 1995. Zitiert auf Seite: 166

[14] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Ann. of Math.*, 142, S. 443–551, 1995. Zitiert auf Seite: 64

Symbolverzeichnis

Symbole

$[x_0, \ldots, x_n]$ Basisvektoren in simplizialen Auflösungen, 164

$\sqrt{a}$, $\sqrt[R]{a}$ Radikal von a, 65

$|\cdot|$ Mächtigkeit,

$\cap$ Durchschnitt von Mengen,

$\cup$ Vereinigung von Mengen,

$\sqcup$ disjunkte Vereinigung von Mengen,

$\subset$ Teilmengenrelation (Gleichheit ist erlaubt),

$\otimes_R$ Tensorprodukt von R-Moduln, 38

$\simeq_R$ kettenhomotop, kettenhomotopieäquivalent, 154

$\times$ kartesisches Produkt,

A

Ab Kategorie der abelschen Gruppen, 7

$a \cdot M$ vom Ideal a erzeugter Untermodul von M, 88

$\mathbb{A}^n_K$ n-dimensionaler affiner Raum über K, 58

$a[T]$ erweitertes Ideal im Polynomring, 75

$(a : x)$ Idealquotient von a und x, 136

B

Bal Menge der balancierten Produkte, 37

Buchberger Algorithmus von Buchberger, A.11

C

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen,

${}_R\mathsf{Ch}$ Kategorie der Kettenkomplexe von R-Linksmoduln, 153

C^∞ Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten, 22

$C(M)$	eine funktorielle projektive Auflösung von M, 166

D

dim	Dimension, 74
Div	verallgemeinerte Division mit Rest, A.9
∂	Randoperator/Differential, 150
$\partial_R x$	der Rand von x im Ring R, 102

F

$\overline{f}^{\{g_1,\ldots,g_d\}}$	Rest von f bei Division durch $\{g_1,\ldots,g_d\}$, A.10

G

Group	Kategorie der Gruppen, 7

H

$H_n(C)$	n-te Homologie von C, 153
$H_n(f)$	auf Homologie induzierte Abbildung, 154
${}_R\mathrm{Hom}$	R-linkslineare Homomorphismen, 21
Hom_R	R-rechtslineare Homomorphismen, 21

I

id	Identitätsmorphismus, 6
$\mathbf{I}_K(V)$	durch die affine algebraische Menge V definiertes Verschwindungsideal, 62
Im	Imaginärteil,
im	Bild, 11, 15

J

$J(R)$	Jacobson-Radikal des Rings R, 73

K

ker	Kern, 11, 15
$\mathbf{K}_K(V)$	Koordinatenring der affinen algebraischen Menge V, 64
$k(R)$	Restklassenkörper des lokalen Rings R, 86
$K(S)$	von S erzeugter Teilkörper von …, 127

L

LC	Leitkoeffizient, A.9
$\varinjlim$	Kolimes, 27
$\varprojlim$	inverser Limes, 27
$L \mid K$	Körpererweiterung, 127
LM	Leitmonom, A.9
LT	Leitterm, A.9
LT	Leittermideal, A.9

M

mdeg	Multigrad, A.9
${}_S\mathsf{Mod}_R$	Kategorie der (S,R)-Bimoduln, 14
${}_R\mathsf{Mod}$	Kategorie der R-Linksmoduln, 14
Mod_R	Kategorie der R-Rechtsmoduln, 14
Mor_C	Morphismen in der Kategorie C, 6
$\mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$	von X dargestellter kovarianter Funktor, 21
$\mathrm{Mor}_C(\cdot\,, X)$	von X dargestellter kontravarianter Funktor, 20
M_p	Lokalisierung von M an $R \setminus p$, d.h. $R_p \otimes_R M$, 104

mSpec Maximalspektrum, 54

N

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen: $\{0, 1, 2, \dots\}$,
ν_p p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$, 144
nRing Kategorie der ninoko Ringe, 11

O

Ob Klasse der Objekte einer Kategorie, 6
$\cdot^{\mathrm{op}}$ duale Kategorie, 17

P

$P \square \varepsilon$ zusammengesetzte Sequenz, 163
$p[T]$ erweitertes Ideal im Polynomring, 75

Q

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen,
$Q(R)$ Quotientenkörper von R, 91

R

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen,
R/a Restklassenring von R modulo a, 51
$R_{[\![a]\!]}$ a-adische Vervollständigung von R, 112
Re Realteil,
R_f Lokalisierung von R an $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (wobei $f \in R$ ist), 92
Ring Kategorie der Ringe, 11
R_p Lokalisierung von R an $R \setminus p$ (wobei $p \in \operatorname{Spec} R$), 92
$R[S]$ von S erzeugte R-Unteralgebra von …, 126
$R[\![T]\!]$ Ring der formalen Potenzreihen, 32

S

S^{-1} Lokalisierungsfunktor, 94
Set Kategorie der Mengen, 7
$S(g, h)$ Polynom mit eliminierten Leittermen, A.11
Spec Primspektrum, 54
$S^{-1}R$ Lokalisierung von R an S, 90
$S(X)$ der simpliziale Kettenkomplex zu X, 164
S_x spezielle multiplikative Teilmenge zu x, 102

T

Top Kategorie der topologischen Räume, 7
Tor Tor, Ableitung des Tensorprodukts, 171
trdeg_K Transzendenzgrad über K, 80

V

$V_R(a)$ abgeschlossene Menge in $\operatorname{Spec} R$ zu $a \subset R$, 60
Vect_K Kategorie der K-Vektorräume, 7
$\mathbf{V}_K(F)$ durch die Polynommenge F definierte affine algebraische Menge, 62

Z

$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Z}_{[\![p]\!]}$	der Ring der p-adischen ganzen Zahlen, 87

Index

A

abgeleiteter Funktor, 171
adisch konvergent, A.5
adisch vollständig, 112
adische Cauchyfolge, A.5
adische Topologie, A.5
adische Vervollständigung, 112
adjungierte Funktoren, 19, 34
    Hom-Tensor-Adjunktion, 42
affine algebraische Menge, 62
    endlich erzeugt, 125
    Koordinatenring, 64
    Morphismen, 69
    Robotik, 64
affine algebraische Varietät, 62
affiner Raum, 58, 69
Algebra, 80, 126
    endlich erzeugt, 126
algebraisch, 127
algebraisch abhängig, 80
algebraisch unabhängig, 80
algebraische Geometrie, 70
algebraische Menge, 62
algebraische Varietät, 62
algebraischer Hilbertscher Nullstellensatz, 129
algorithmische Kommutative Algebra, A.7
Algorithmus
    verallgemeinerte Division, A.9
    von Buchberger, A.11
Analysis auf Mannigfaltigkeiten, 22
arithmetische Geometrie, 71
artinscher Ring, 138
    ist noethersch, 139
    Primspektrum, 138

B

balanciertes Produkt, 37
basierte Vektorräume, 18
Basis
    Gröbner-, A.10
Basiswechselfunktor, 41
beidseitiges Ideal, 14
Bewertung, 143
Bibliothek, 3
Bild
    Modulhomomorphismus, 14
    Ringhomomorphismus, 11
Bimodul, 12
Buchberger
    Algorithmus, A.11
    Kriterium, A.11

D

dargestellter Funktor, 20
darstellbarer Funktor, 24
    und (Ko)Limiten, 33
De-Rham-Kohomologie, 152
Dedekindring, 143
derivierte Kategorie, 176
Diagrammjagd, 156
Dicksons Lemma, A.8
Differential, 150
Dimension, 74
    Polynomring, 76, 78, 83
    Transzendenzgrad, 82
dimension shifting, 172
Dimensionskriterium, 80
direkte Summe, 30
diskrete Bewertung, 143
diskrete Ordnung, 26
diskreter Bewertungsring, 143
Distributivitätsgesetz, 9
Divisionsalgorithmus, A.9
Doppeldual, 23
Dualraum, 20

E

Elementartensor, 39
endlich präsentiert, 180
exakter Funktor, 96
Ext, 171

F

Faser, 100
flach, 97, 162
formale Potenzreihen, 32
freies Produkt, 30
Fundamentalsatz der homologischen Algebra, 167
Fünferlemma, 156
Funktionskeime, 87
Funktor, 17
    adjungiert, 19
    adjungierte, 34
    Basiswechsel, 41
    dargestellter, 20
    darstellbarer, 24
    Dualraum, 20
    erhält Isomorphie, 19
    exakt, 96
    glatter Funktionen, 22
    Hom-, 21
    Homologie, 154
    Identitätsfunktor, 18
    kontravariant, 17
    kovariant, 17
    rechtsexakt, 44
    Tensorprodukt, 40
    Vergissfunktor, 18

G

generischer Punkt, 61
gerichteter Limes, *siehe* Kolimes
gerichteter Multigraph, 15
gerichteter Weg, 15
glatte Funktion, 22
Graph
    gerichteter Multi-, 15
Gröbner-Basis, A.10
    Berechnung, A.11
Gruppe
    als Kategorie, 8

H

Henselsches Lemma, 115
Hilbertscher Basissatz, 124
    für Potenzreihenringe, 125
Hilbertscher Nullstellensatz, 59, 66, 126, 129
Hom-Funktor, 21
Hom-Tensor-Adjunktion, 42
Homologie, 153
    Homotopieinvarianz, 155
Homomorphismus
    von Moduln, 14
Homotopieinvarianz, 155
Homotopiekategorie, 155
Hufeisenlemma, 169

I

Ideal, 14

irreduzibel, 130, 135
Leittermideal, A.9
maximales, 51
monmoial, A.8
prim, 50
primär, 130
Verschwindungsideal, 62
Idealquotient, 136
Identitätsfunktor, 18
Identitätsmorphismus, 6
induktiver Limes, *siehe* Kolimes
inverser Limes, 27
Eindeutigkeit, 29
Existenz, 31
irreduzibel, 135
irreduzibles Ideal, 130
Isomorphismus
in einer Kategorie, 8
natürlicher, 22
unter Funktoren, 19

J

Jacobson-Radikal, 73

K

K-Algebra, 80
Körpererweiterung, 127
Kante, 15
Kategorie, 6
der Gruppen, 7
der Kettenkomplexe, 153
der Mengen, 7
der Moduln, 14
der Ringe, 11
der topologischen Räume, 7
der Vektorräume, 7
derivierte, 176
duale, 17
Homotopiekategorie, 155
Morphismus, 6
Objekt, 6
Kern
Modulhomomorphismus, 14
Ringhomomorphismus, 11
Kette, 150
Kettenabbildung, 152
Kettenhomotopie, 154
kettenhomotopieäquivalent, 154
Kettenkomplex, 150
Homologie, 153
Knoten, 15
Kokettenkomplex, 152
Kolimes, 27
Eindeutigkeit, 29
Existenz, 31
Kommutative Algebra
algorithmisch, A.7
Anwendungen, 3
warum?, 1
kommutatives Diagramm, 15, 16
kontravarianter Funktor, 17
Koordinatenring, 64, 67, 72
Koprodukt, 30
Körper
Quotientenkörper, 91
Restklassenkörper, 86
kovarianter Funktor, 17
Kriterium von Buchberger, A.11
Krull-Dimension, *siehe* Dimension

L

lange exakte Homologiesequenz, 158
Lasker-Noether-Sätze, 138
Leitkoeffizient, A.9
Leitmonom, A.9
Leitterm, A.9
Leittermideal, A.9
Lemma von Nakayama, 88
lexikographische Ordnung, A.8
Limes, *siehe* inverser Limes
Linksideal, 14
Linksmodul, 12
lokal frei, 108, 162, 179, 180
lokale Eigenschaft, 104
lokaler Ring, 86, 99
Lokalisierung, 90
exakt, 96
flach, 97
Primspektrum, 98
universelle Eigenschaft, 93

von Moduln, 94
Lokalisiserung
Ore-Lokalisierung, 94

M

Mannigfaltigkeit, 22
maximales Ideal, 51
Restklassenring, 51
Maximalspektrum, 54
Menge
partiell geordnete, 26
Mini-Noether-Normalisierung, 128
Möbiusband, 110
Modul, 12
endlich präsentiert, 180
flach, 97, 162
lokal frei, 108, 162, 179, 180
lokale Eigenschaft, 104
Lokalisierung, 94
projektiv, 160
Rang, 22
Tensorprodukt, 38
Modulhomomorphismus, 14
Bild, 14
Kern, 14
Modulisomorphismus, 14
monomiales Ideal, A.8
Morphismen
von affinen algebraischen Mengen, 69
Morphismus, 6
Multigrad, A.9
multiplikativ abgeschlossen, 90

N

Nakayama, 88
natürliche Transformation, 22
natürlicher Isomorphismus, 22
nilpotent, 71
Nilradikal, 72
universelle Eigenschaft, 72
ninoko, 9, 10
Noether-Normalisierung, 128
noetherscher Ring, 120
Dimension 0, 139
Dimension 1, 141
Nullring, 10

O

Ordnung
diskrete, 26
lexikographisch, A.8
partielle, 26
totale, 26
Ore-Lokalisiserung, 94

P

p-adische Bewertung, 144
p-adische Zahlen, 87
p-primär, 131
partiell geordnete Menge, 26
Polynomring
Dimension, 76, 78, 83
noethersch, 124
Transzendenzgrad, 81
Potenzreihen, 32
Potenzreihenring, 114
noethersch, 125
prim, 50
primäres Ideal, 130
Primärzerlegung, 132
Primideal, 50
Restklassenring, 51
Primspektrum, 54
Faser, 100
Lokalisierung, 98
Produkt, 31
balanciertes, 37
projektive Auflösung, 163
Eindeutigkeit, 168
Existenz, 166
projektiver Limes, *siehe* inverser Limes
projektiver Modul, 160

Q

Quotient, 30
Quotientenkörper, 91

R

R-Algebra, 126
Radikal, 65
  Jacobson-Radikal, 73
  Nilradikal, 72
Rand, 102, 150
Randoperator, 150
Rang freier Moduln, 22
rechtsexakt, 44
Rechtsideal, 14
Rechtsmodul, 12
Referenzen, 3
Rest bei Division, A.9
Restklassenkörper, 86
Restklassenring, 51
Ring, 9
  artinsch, 138
  Dedekindring, 143
  Homomorphismus, 10
  lokaler, 86, 99
  Lokalisierung, 90
  ninoko, 9
  noethersch, 120
  Nullring, 10
  Restklassenring, 51
Ringhomomorphismus, 10
  Bild, 11
  Kern, 11
Ringisomorphismus, 11
Robotik, 64

S

Satz
  algebraischer Hilbertscher Nullstellensatz, 129
  Dicksons Lemma, A.8
  dimension shifting, 172
  Dimensionskriterium von Coquand und Lombardi, 80
  Fünferlemma, 156
  Fundamentalsatz der homologischen Algebra, 167
  Henselsches Lemma, 115
  Hilbertscher Basissatz, 124
  Hilbertscher Nullstellensatz, 59, 66, 126, 129
  Hufeisenlemma, 169
  Lasker-Noether, 138
  Lemma von Nakayama, 88
  Noether-Normalisierung, 128
  schwacher Hilbertscher Nullstellensatz, 59, 126
  starker Hilbertscher Nullstellensatz, 66
  Struktursatz für artinsche Ringe, 141
  Yoneda-Lemma, 24
Schema, 70
schwacher Hilbertscher Nullstellensatz, 59, 126
simpliziale Auflösung, 164
Spektrum, 54
starker Hilbertscher Nullstellensatz, 66
Syzygy, 167

T

Tensorprodukt
  Adjunktion, 42
  Basiswechsel, 41
  Funktor, 40
  Moduln, 38
  über lokalen Ringen, 88
  und inverse Limiten, 46
  und Kolimiten, 43
  Vektorräume, 35
  von endlich erzeugten abelschen Gruppen, 45
Tesnorprodukt
  rechtsexakt, 44
Topologie
  Zariski-, 60
Tor, 170, 171
  Axiome, 171
  Beispiele, 172, 176
  Konstruktion, 173
  Rezept, 174
  Symmetrie, 178, 179
  Torsion, 172
totale Ordnung, 26
Transformation

natürliche, 22
Transzdendenzgrad, 81
Transzendenzgrad, 80

U

unabhängig
algebraisch, 80
universelle Eigenschaft
inverser Limes, 27
Kolimes, 27
Lokalisierung, 93
Nilradikal, 72
Tensorprodukt, 38

V

Varietät, 62
Vektorbündel, 104
Vektorräume
basierte, 18
verallgemeinerter Divisionsalgorithmus, A.9
Verbindungshomomorphismus, 158, 171
Vergissfunktor, 18
Verschwindungsideal, 62
Vervollständigung, 112
Vorlesung
Überblick, 3

W

warum Kommutative Algebra?, 1
Weg
gerichteter, 15
Wörterbuch, A.3

Y

Yoneda-Lemma, 24

Z

Zariski-Topologie, 60
Zykel, 150