Wiederholungsklausur zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 4. Oktober 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 6 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Als Hilfsmittel ist nur die handschriftlich ausgefüllte Vorlage (DIN A4, keine Kopie) zulässig.
- Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte maximal	12	12	12	12	12	60
erreichte Punkte						

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte). Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2, Y - X^2 + 1)$.

1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2, Y - X^2 + 1) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Wieviele Elemente enthält $\operatorname{mSpec} R$? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Bestimmen Sie $\dim R$. Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Ist der Ring R isomorph zu $\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2 + 1)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (8 + 4 = 12 Punkte).

1. Wie zeigt man, dass Flachheit von Moduln eine lokale Eigenschaft ist? Skizzieren Sie kurz die wichtigsten Beweisschritte!
2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wie kann man mit dem schwachen Hilbertschen Nullstellensatz $\operatorname{mSpec} K[X_1, \ldots, X_n]$ bestimmen?

Aufgabe 3 ($3+3+3+3=12$ Punkte)**.** Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Funktor ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod}$, der exakt ist.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ringhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow S$, für den $\operatorname{Spec} f\colon \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ *nicht* surjektiv ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für ein $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y]$, für das $\mathbb{C}[X,Y]/p$ *kein* Dedekindring ist.
4. Geben Sie ein Beispiel für einen $\mathbb{Q}[T]$-Modul, der *nicht* flach ist.

Aufgabe 4 ($6+6=12$ Punkte)**.**

1. Sei R ein noetherscher Ring, sei $m \subset R$ ein maximales Ideal und es gebe einen nicht-trivialen R-Untermodul M von R^{2018} mit $m \cdot M \cong_R \{0\}$. Zeigen Sie, dass R *kein* lokaler Ring ist.

2. Sei R ein nicht-trivialer noetherscher Ring, für den $\operatorname{Spec} R$ ein diskreter topologischer Raum ist (d.h. jede Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ ist offen). Zeigen Sie, dass R artinsch ist.

Aufgabe 5 (6 + 6 = 12 Punkte)**.**

1. Sei R ein Ring und seien P und Q projektive R-Moduln. Zeigen Sie, dass dann auch der R-Modul $P \oplus Q$ projektiv ist.

2. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ mit $C \simeq_{\mathbb{Z}} D$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \cong_{\mathbb{Q}} H_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D).$$