Probeklausur zur Kommutativen Algebra

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser — 9. Juli 2018

Name: Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 6 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Als Hilfsmittel ist nur die handschriftlich ausgefüllte Vorlage (DIN A4, keine Kopie) zulässig.

– Es sind keine sonstigen Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte maximal	12	12	12	12	12	60
erreichte Punkte						

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)**.** Sei $R := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^2)$.

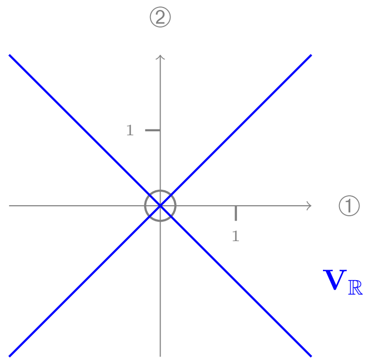
1. Skizzieren Sie $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X^2) \subset \mathbb{R}^2$.
2. Ist $\operatorname{Spec} R$ endlich? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Bestimmen Sie $\dim R$. Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Ist der Ring R artinsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X^2) &= \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y^2 - x^2 = 0\bigr\} \\ &= \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y = x\bigr\} \cup \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y = -x\bigr\};\end{aligned}$$

somit erhalten wir:



$\mathbf{V}_{\mathbb{R}}(Y^2 - X^2)$

2. Nein, denn: Für alle $x \in \mathbb{C}$ ist

$$p_x := \bigl([X - x], [Y - x]\bigr) \subset R$$

ein Primideal, da

$$R/p_x \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}[X,Y]/(X - x, Y - x) \cong_{\mathsf{Ring}} \mathbb{C}$$

ein Integritätsring ist.

Außerdem zeigen die (wohldefinierten!) Einsetzungshomomorphismen $R \longrightarrow \mathbb{C}$ zu (x,x) mit $x \in \mathbb{C}$, dass

$$\forall_{x,x' \in \mathbb{C}} \quad x \neq x' \Longrightarrow p_x \neq p_{x'}.$$

3. Es gilt $\dim R = 1$, denn: Sei $\pi\colon \mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow R$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} R &\longrightarrow \{q \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y] \mid (Y^2 - X^2) \subset q\} \\ p &\longmapsto \pi^{-1}(p) \end{aligned}$$

   bijektiv (und mit Inklusion von Idealen verträglich).

   Wegen $(Y^2 - X^2) \subset (Y - X) \subsetneq (X,Y)$ ist daher $\dim R \geq 1$.

   Wegen $\dim \mathbb{C}[X,Y] = 2$ und $(0) \in \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X,Y]$ sowie $(0) \subsetneq (Y^2 - X^2)$ folgt umgekehrt auch $\dim R \leq 1$.

4. Nein, denn: Artinsche Ringe sind null-dimensional, aber nach dem dritten Teil ist $\dim R \neq 0$.

   [Alternativ kann man auch direkt eine absteigende Folge von Idealen in R angeben, die nicht stationär wird.]

Aufgabe 2 (8 + 4 = 12 Punkte).

1. Wie beweist man, dass das Tensorprodukt mit Kolimiten verträglich ist? Skizzieren Sie die wichtigsten Beweisschritte!

2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Nennen Sie zwei Resultate, die zentral in den Beweis von $\dim K[X_1, \dots, X_n] \leq n$ eingehen.

Lösung:

1. Sei R ein ninoko Ring und sei M ein R-Rechtsmodul. Man zeigt:

   - Die Funktoren $M \otimes_R \ \cdot\ : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_\mathbb{Z}\mathsf{Mod}$ und $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, \ \cdot\ ) : {}_\mathbb{Z}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ zueinander adjungiert.
   - Kovariante darstellbare Funktoren sind mit inversen Limiten verträglich, kontravariante darstellebare Funktoren übersetzen Kolimiten in inverse Limiten.
   - Mithilfe dieser Aussage über darstellbare Funktoren zeigt man: Adjungierte Funktoren sind (je nach Seite) mit Kolimiten bzw. inversen Limiten verträglich.
   - Also ist $M \otimes_R \ \cdot\ $ mit Kolimiten verträglich.

2. Solche Resultate sind zum Beispiel [zwei davon genügen]:

   - Das Dimensionskriterium von Coquand und Lombardi.
   - Die Abschätzung $\dim R \leq \operatorname{trdeg}_K R$ für jede K-Algebra R.
   - Die Tatsache, dass $\operatorname{trdeg}_K K[X_1, \dots, X_n] = n$ für alle Körper K und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Geben Sie ein Beispiel für einen Funktor $F\colon {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}/(3)}\mathsf{Mod}$ mit
$$F(\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}/(3)} \mathbb{Z}/(3) \quad \text{und} \quad F(\mathbb{Z}^2) \not\cong_{\mathbb{Z}/(3)} \mathbb{Z}/(3).$$
2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R, für den $\operatorname{mSpec} R$ endlich und $\operatorname{Spec} R$ unendlich ist.
3. Geben Sie ein Beispiel für ein primäres Ideal $q \subset \mathbb{C}[X, Y]$ mit $\sqrt{q} \neq q$.
4. Geben Sie ein Beispiel für einen noetherschen Ring R und eine endlich erzeugte R-Algebra A, die als R-Modul *nicht* endlich erzeugt ist.

Lösung:

1. Der Funktor $F := \mathbb{Z}/(3) \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}/(3)}\mathsf{Mod}$ erfüllt
$$F(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}/(3)} \mathbb{Z}/(3)$$
und (wegen der Verträglichkeit mit direkten Summen)
$$\begin{aligned} F(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}/(3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2 &\cong_{\mathbb{Z}/(3)} \bigl(\mathbb{Z}/(3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\bigr) \oplus \bigl(\mathbb{Z}/(3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\bigr) \\ &\cong_{\mathbb{Z}/(3)} \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(3) \not\cong_{\mathbb{Z}/(3)} \mathbb{Z}/(3). \end{aligned}$$
[Es gibt natürlich viele weitere Beispiele von Funktoren, die auch diese Eigenschaft besitzen]
2. Sei $R := \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]_{(X_1, X_2, \dots)}$. Dann ist R ein lokaler Ring (da $(X_1, X_2, \dots)$ ein Primideal in $\mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]$ ist). Insbesondere ist
$$|\operatorname{mSpec} R| = 1.$$
Aber R enthält unendlich viele verschiedene Primideale; zum Beispiel ist
$$S^{-1}(X_1, \dots, X_n)$$
mit $S := \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots] \setminus (X_1, X_2, \dots)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Primideal in R und all diese Ideale sind verschieden.

3. Sei $q := (X^2, Y) \subset \mathbb{C}[X,Y]$. Dann ist
$$\sqrt{q} = \sqrt{(X^2, Y)} = (X, Y)$$
ein maximales Ideal. Also ist q ein primäres Ideal und
$$\sqrt{q} = (X, Y) \neq (X^2, Y) = q.$$

4. Sei zum Beispiel R ein Körper und $A := R[T]$. Dann ist A eine R-Algebra; diese ist endlich erzeugt (von T). Aber A ist als R-Modul *nicht* endlich erzeugt (denn $\dim_R R[T] = \infty$).

Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 Punkte).

1. Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m und sei $a \subset R$ ein Ideal mit $a/m \cdot a \cong_R \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $a = (0)$ ist.
2. Sei R ein Integritätsring und für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ gelte $\dim R_p = 0$. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Lösung:

1. Da R noethersch und $a \subset R$ ein Ideal ist, ist a ein endlich erzeugter R-Modul. Nach Voraussetzung ist $a/m \cdot a \cong_R \{0\}$, und damit $a = m \cdot a$. Da R lokal und m maximal ist, folgt mit dem Lemma von Nakayama, dass $a = (0)$ ist.
2. Aufgrund der Lokalität der Dimension ist

$$\dim R = \sup\{p \in \operatorname{Spec} R \mid \dim R_p\}.$$

Mit der Voraussetzung (und der Tatsache, dass R als Integritätsring nicht-trivial ist und somit mindestens ein Primideal enthält) folgt daher

$$\dim R = 0.$$

Das Primideal $(0) \subset R$ (Integritätsring!) ist somit ein maximales Ideal. Also ist R ein Körper.

Aufgabe 5 (6 + 6 = 12 Punkte)**.**

1. Sei R ein Ring, sei P ein projektiver R-Modul und sei Q ein direkter Summand von P. Zeigen Sie, dass dann auch Q ein projektiver R-Modul ist.

2. Sei R ein Ring und seien C und D Kettenkomplexe von R-Linksmoduln. Wie kann man das Koprodukt von C und D in ${}_R\mathsf{Ch}$ konstruieren? Begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Lösung:

1. Nach Voraussetzung gibt es einen R-Modul $\overline{Q}$ mit $Q \oplus \overline{Q} \cong_R P$. Da P projektiv ist, gibt es außerdem einen freien R-Modul F und einen R-Modul $\overline{P}$ mit $P \oplus \overline{P} \cong_R F$. Kombiniert erhalten wir also
$$Q \oplus (\overline{Q} \oplus \overline{P}) \cong_R (Q \oplus \overline{Q}) \oplus \overline{P} \cong_R P \oplus \overline{P} \cong_R F.$$
Als direkter Summand eines freien Moduls ist daher auch Q projektiv.

   [Alternativ kann man auch nachrechnen, dass Q die Liftungseigenschaft projektiver Moduln besitzt, oder eine der anderen Charakterisierungen projektiver Moduln verwenden.]

2. Wir betrachten die gradweise direkte Summe
$$C \oplus D := \bigl((C_n \oplus D_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\partial_n^C \oplus \partial_n^D)_{n\in\mathbb{N}}\bigr)$$
von C und D. Dies ist ein R-Linksmodulkettenkomplex und die gradweisen kanonischen Inklusionen
$$i_C \colon C \longrightarrow C \oplus D \quad \text{und} \quad i_D \colon D \longrightarrow C \oplus D$$
sind R-Kettenabbildungen.

   Dann bildet $C \oplus D$ zusammen mit i_C und i_D ein Koprodukt von C und D in ${}_R\mathsf{Ch}$, denn: Sei $E = (E_*, \partial_*^E) \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f \colon C \longrightarrow E$, $g \colon D \longrightarrow E$ Kettenabbildungen. Dann gibt es genau eine R-Kettenabbildung $h \colon C \oplus D \longrightarrow E$ mit
$$h \circ i_C = f \quad \text{und} \quad h \circ i_D = g,$$
nämlich die durch
$$\begin{aligned} h_n \colon (C \oplus D)_n = C_n \oplus D_n &\longrightarrow E_n \\ (x, y) &\longmapsto f_n(x) + g_n(y) \end{aligned}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gegebene.