Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 1 vom 14. April 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden ab Blatt 2 teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Ringe und Moduln)**.** Wiederholen Sie die Grundbegriffe zu Ringen, Idealen und Moduln aus der Linearen Algebra I/II. Warum wurden in der Linearen Algebra II Ringe und Moduln behandelt?

Fingerübung B (Kategorien)**.** Wie würden Sie folgende Kategorien definieren?

- Die Kategorie der endlichen Gruppen
- Die Kategorie der partiell geordneten Mengen
- Die Kategorie der metrischen Räume
- Die Kategorie der metrischen Räume (nochmal, aber anders?!)
- Die Kategorie der messbaren Räume

Fingerübung C (eindeutige Morphismen)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \operatorname{Ob}(C)$.

1. Zeigen Sie, dass es nur genau einen Identitätsmorphismus für X in C gibt.
2. Zeigen Sie: Ist $Y \in \operatorname{Ob}(C)$ und ist $f \in \operatorname{Mor}_C(X,Y)$ ein Isomorphismus, so gibt es genau einen zu f inversen Isomorphismus in $\operatorname{Mor}_C(Y,X)$.
3. Wie können Sie aus diesen Aussagen die Eindeutigkeit neutraler Elemente bzw. inverser Elemente in Gruppen ableiten?

Fingerübung D (Bibliothek: Kategorientheorie)**.** Suchen und vergleichen Sie Quellen (Bücher, hochwertige Webseiten, ...) zur Kategorientheorie. Womit können Sie am besten arbeiten?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Isomorphie; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei C eine Kategorie und seien X, Y, Z Objekte von C.

1. Zeigen Sie: Gilt $X \cong_C Y$, so folgt $Y \cong_C X$.
2. Zeigen Sie: Gilt $X \cong_C Y$ und $Y \cong_C Z$, so folgt $X \cong_C Z$.

Aufgabe 2 (kleine Kategorien; 4 (=2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt eine Kategorie mit genau 2026 Objekten.
2. Ist X ein Objekt in einer Kategorie C mit $\#\operatorname{Mor}_C(X,X) = 2026$, so ist jeder Morphismus in $\operatorname{Mor}_C(X,X)$ ein Isomorphismus.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Null; 4 (=1+2+1) Punkte). Sei C eine Kategorie. Ein *Nullobjekt in C* ist ein Objekt $N \in \mathrm{Ob}(C)$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}(C)$ gibt es genau einen Morphismus in $\mathrm{Mor}_C(X, N)$ und genau einen Morphismus in $\mathrm{Mor}_C(N, X)$.

1. Zeigen Sie, dass die Kategorien $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$, Group, ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ jeweils ein Nullobjekt besitzen.
2. Besitzt die Kategorie Set ein Nullobjekt? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Zeigen Sie: Falls eine Kategorie ein Nullobjekt besitzt, so ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

$$X \xrightarrow{\exists!} N \qquad\qquad N \xrightarrow{\exists!} X$$

Aufgabe 4 (Kern; 4 (=0+2+2) Punkte). Sei C eine Kategorie, die ein Nullobjekt N besitzt (s. Aufgabe 3). Sind $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, so schreiben wir $n_{X,Y} \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ für die Komposition der eindeutigen Morphismen in $\mathrm{Mor}_C(N, Y)$ und $\mathrm{Mor}_C(X, N)$.

Sind $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$, so ist ein Paar (K, k), bestehend aus einem Objekt $K \in \mathrm{Ob}(C)$ und einem Morphismus $k \in \mathrm{Mor}_C(K, X)$, ein *Kern von f in C*, wenn $f \circ k = n_{K,Y}$ und folgendes gilt: Für jedes Objekt $K' \in \mathrm{Ob}(C)$ und jeden Morphismus $k' \in \mathrm{Mor}_C(K', X)$ mit $f \circ k' = n_{K',Y}$ gibt es genau einen Morphismus $g \in \mathrm{Mor}_C(K', K)$ mit $k \circ g = k'$.

1. Illustrieren Sie diesen Begriff durch ein geeignetes Diagramm!
2. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass jeder Morphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ einen Kern im obigen Sinne besitzt.
3. Zeigen Sie: Falls ein Morphismus in einer Kategorie einen Kern im obigen Sinne besitzt, so ist dieser Kern „im wesentlichen" eindeutig bestimmt.

   Hinweis. Insbesondere müssen Sie eine präzise Formulierung für „im wesentlichen" finden!

Bonusaufgabe (Isomorphismen in Lean; 4 Punkte). Wie sind Isomorphismen in Kategorien in der mathlib4 für den Beweisassistenten Lean 4 definiert? Was bedeutet dort die Notation „$X \cong Y$"? Wie unterscheidet sich dies von unserer Definition von „Isomorphismus" bzw. „isomorph" in Kategorien? Welche Vor- und Nachteile haben die beiden Zugänge?
Hinweis. Vergessen Sie nicht, alle verwendeten Quellen zu zitieren!

Abgabe bis 21. April 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS