

# Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 10 vom 16. Juni 2026

**Hinweis.** Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

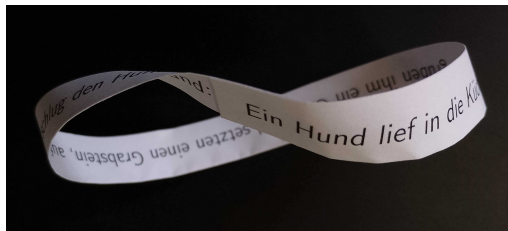
**Fingerübung A** (Wiederholung: Kapitel 3). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Ist  $R$  ein Ring, ist  $S \subset R$  multiplikativ abgeschlossen und ist  $M$  ein  $R$ -Modul mit  $L_S M \cong_{S^{-1}R} \{0\}$ , so folgt  $M \cong_R \{0\}$ .
2. Ist  $R$  ein Ring und  $m \in \text{mSpec } R$ , so gilt  $\dim R = \dim R_m$ .
3. Nach dem Lemma von Nakayama ist jeder Modul über einem lokalen Ring endlich erzeugt.
4. Jeder Körper ist ein flacher  $\mathbb{Z}$ -Modul.
5. Jeder freie Modul ist lokal frei.
6. Der Ring  $\mathbb{Z}[T]$  ist  $(T)$ -adisch vollständig.

**Fingerübung B** (lokale Trivialität). Geben Sie für jeden der folgenden  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $M$  jeweils ein  $q \in \text{Spec } \mathbb{Z}$  mit  $M_q \not\cong_{\mathbb{Z}_q} \{0\}$  an.

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/(2), \quad \mathbb{Z}/(2026), \quad \mathbb{Q}, \quad \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}[T]/(T^2 + 1)$$

**Fingerübung C** (Möbiusband). Basteln Sie ein Möbiusband aus Papier. Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der Rand? Entfernen Sie den Nullschnitt des Möbiusbandes mithilfe einer Schere. Wieviele Zusammenhangskomponenten hat das entstehende Objekt? Wieviele der Rand?



**Fingerübung D** (adische Gleichungen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Es gibt ein  $x \in \mathbb{Z}_{[3]}$  mit  $x^2 = 2$ .
2. Es gibt ein  $x \in \mathbb{Z}_{[7]}$  mit  $x^2 = 2$ .
3. Es gibt ein  $f \in \mathbb{Z}[[T]]$  mit  $f \cdot (1 - T) = 1$ .
4. Es gibt ein  $f \in \mathbb{Z}[[T]]$  mit  $f \cdot (2 - T) = 1$ .

*Bitte wenden*

**Hinweis.** Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

**Aufgabe 1** (ein algebraisches Möbiusband; 4 Punkte). Sei  $R := \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$  und sei

$$A := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} [1+X] & [Y] \\ [Y] & [1-X] \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(R).$$

Zeigen Sie, dass der  $R$ -Modul  $M := \{A \cdot x \mid x \in R^2\}$  lokal frei ist.

*Hinweis.* Zeigen Sie zunächst, dass  $A \cdot A = A$ . Wie erhält man daraus eine Zerlegung von  $R^2$ ?

**Aufgabe 2** (vollständig prim? 4 (=2+2) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das Element  $1 + T$  ist prim in  $\mathbb{Z}[[T]]$ .
2. Das Element  $T$  ist prim in  $\mathbb{Z}[[T]]$ .

**Aufgabe 3** (Spaltereien I; 4 (=3+1) Punkte). Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul, für den es einen  $R$ -Modul  $\bar{M}$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $M \oplus \bar{M} \cong_R R^n$  gibt. Zeigen Sie:

1. Für jeden surjektiven  $R$ -Modulhomomorphismus  $f: N \rightarrow N'$  und jeden  $R$ -Modulhomomorphismus  $g: M \rightarrow N'$  gibt es einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $\tilde{g}: M \rightarrow N$  mit  $f \circ \tilde{g} = g$ .
2. Folgern Sie: Jeder surjektive  $R$ -Modulhomomorphismus  $f: N \rightarrow M$  besitzt einen *Rechtsspalt*, d.h. einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $\sigma: M \rightarrow N$  mit  $f \circ \sigma = \text{id}_M$ .

**Aufgabe 4** (Spaltereien II; 4 (=2+2) Punkte). Sei  $R$  ein Ring. Zeigen Sie:

1. Ist  $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} Q \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  ${}_R\text{Mod}$ , so besitzt  $f$  genau dann einen Rechtsspalt, wenn  $i$  einen Linksspalt besitzt.
2. Ist  $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} Q \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  ${}_R\text{Mod}$  und besitzt  $f$  einen Rechtsspalt, so ist für jeden  $R$ -Modul  $N$  die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow N \otimes_R K \xrightarrow{N \otimes_R i} N \otimes_R M \xrightarrow{N \otimes_R f} N \otimes_R Q \longrightarrow 0$$

**Bonusaufgabe** (adische Topologie; 4 Punkte). Lesen Sie Anhang A.2 über die adische Topologie. Zeigen Sie, dass die adische Vervollständigung als Vervollständigung bezüglich der adischen Topologie aufgefasst werden kann (liefern Sie also einen Beweis von Proposition A.2.4).