Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt $11\frac{1}{2}$ vom 26. Juni 2026

Hinweis. Diese Aufgaben sind freiwillige Zusatzaufgaben zur Wiederholung.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (2 (=1+1) Punkte)**.** Sei $F\colon {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Q}}\mathsf{Mod}$ ein Funktor mit folgender Eigenschaft: Für alle $\mathbb{Z}$-Moduln M, N und alle $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen $f, g\colon M \longrightarrow N$ gilt

$$F(f+g) = F(f) + F(g).$$

1. Zeigen Sie, dass $F(0\colon M \longrightarrow N) = 0$ für alle $\mathbb{Z}$-Moduln M, N gilt.
2. Zeigen Sie, dass $F(\mathbb{Z}/2) \cong_{\mathbb{Q}} \{0\}$.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (2 (=1+1) Punkte)**.** Bestimmen Sie die Kardinalität der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. $\bigl(\mathbb{Z}/42 \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2)\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$
2. $\bigl(\mathbb{Z}/42 \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2)\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

Bonusaufgabe (Wiederholung) (2 Punkte)**.** Ist R ein Integritätsring, so heißt ein R-Modul M *torsionsfrei*, wenn

$$\forall_{r \in R} \quad \forall_{x \in M} \quad r \cdot x = 0 \Longrightarrow (r = 0 \lor x = 0).$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen Modul M über einem Integritätsring R äquivalent sind:

1. Der Modul M ist torsionsfrei.
2. Für jedes $p \in \operatorname{Spec} R$ ist M_p ein torsionsfreier R_p-Modul.
3. Für jedes $m \in \operatorname{mSpec} R$ ist M_m ein torsionsfreier R_m-Modul.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (2 Punkte)**.** Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass $1 - T$ eine Einheit in $R[\![T]\!]$ ist.
Hinweis. Analysis I !

Bonusaufgabe (Wiederholung) (0 Punkte)**.** Womit fängt man Mäuse?

- ☐ Mit Katzegorientheorie, insbesondere (Ko)Limiezen.
- ☐ Mit der Menge aller Primideale eines Körpers.
- ☐ Mit dem Camembertschen Nullstellensatz.
- ☐ Mit maximalen Uhuntermoduhuln.