Kommutative Algebra: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 11 vom 23. Juni 2026

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden und werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen.

Fingerübung A (Wiederholung: Moduln über Hauptidealringen)**.** Wiederholen Sie die Klassifikation endlich erzeugter Moduln über Hauptidealringen (Lineare Algebra II). Welche Techniken für noethersche Ringe wurden dort bereits verwendet?

Fingerübung B (noethersche Ringe)**.** Welche der folgenden Ringe sind noethersch?

1. $\mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots]/(X_0, X_1, \dots)$
2. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$
3. $\mathbb{Z}[X, Y, Z]_{(X,Y)}$
4. $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2 - X^3)$

Fingerübung C (Moduln vs. Algebren)**.** Welche der folgenden Ringe sind endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln? Welche sind endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebren? Welche sind noethersch?

$$\mathbb{Z}/(2026), \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}[T], \quad \mathbb{Z}[T]/(T^2+1), \quad \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}_{2027}$$

Fingerübung D (endlich erzeugte Moduln)**.** Sei R ein Ring und sei

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie: Sind N und Q endlich erzeugt, so ist auch M endlich erzeugt.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise, inhaltlich sinnvoll gegliederte und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Länge von Moduln; 4 (=1+1+2) Punkte)**.** Sei R ein Ring. Die *Länge* $\ell_R(M)$ eines R-Moduls M ist (in Analogie zur Dimension von Ringen) definiert durch

$$\ell_R(M) := \sup\bigl\{n \in \mathbb{N} \bigm| \text{es gibt } R\text{-Untermoduln } N_0, \dots, N_n \text{ von } M \text{ mit } N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_n\bigr\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

1. Zeigen Sie: Ist M ein R-Modul mit $\ell_R(M) = 0$, so ist $M \cong_R \{0\}$.
2. Was ist $\ell_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Sei R ein Hauptidealring und sei $p \in R$ prim. Zeigen Sie, dass $\ell_R\bigl(R/(p^n)\bigr) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (noethersche Ringe; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei R ein Ring. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $R[T]$ noethersch, so ist R noethersch.
2. Ist R noethersch, so ist $\dim R \leq 2026$.

Aufgabe 3 (Länge als Klassifikationshilfsmittel; 4 (=2+2) Punkte)**.** Sei R ein Hauptidealring und sei $p \in R$ prim. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgabenteile (die Länge von Moduln ist in Aufgabe 1 definiert):

1. Die Länge von Moduln (über allgemeinen Rignen) ist additiv bezüglich direkten Summen.
2. Zeigen Sie mithilfe von ℓ_R: Sind $N, M, n_1, \dots, n_N, m_1, \dots, m_M \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_N \geq 1$ und $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_M \geq 1$ sowie
$$\bigoplus_{j=1}^{N} R/(p^{n_j}) \cong_R \bigoplus_{j=1}^{M} R/(p^{m_j}),$$
so folgt $N = M$ und $n_j = m_j$ für alle $j \in \{1, \dots, N = M\}$.
3. Folgern Sie daraus (und mit geeigneten Tensorproduktfunktoren) die Eindeutigkeitsaussage des Klassifikationssatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz II.2.5.16).

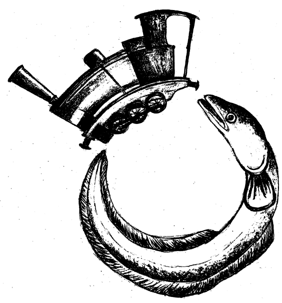
Aufgabe 4 (noethersche Potenzreihenringe; 4 Punkte)**.** Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass dann auch $R[\![T]\!]$ noethersch ist.
Hinweis. Betrachten Sie zu einem Ideal in $R[\![T]\!]$ die Koeffizienten der *niedrigsten* Potenzen. Verschieben Sie dann alle Sorgen ins Unendliche. Achten Sie darauf, dass etwaige auftretende „unendliche Summen“ von Polynomen tatsächlich Potenzreihen liefern.

Bonusaufgabe (noethersche topologische Räume; 4 (=2+2) Punkte)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie noethersche topologische Räume definiert sind.

   Hinweis. Geben Sie nachvollziehbare Quellen an!
2. Zeigen Sie: Ist R ein noetherscher Ring, so ist $\operatorname{Spec} R$ bezüglich der Zariski-Topologie ein noetherscher Raum.

Bonusaufgabe (Lokalisiserungen; 2 Punkte)**.** Zeichnen Sie einen Cartoon (oder schreiben Sie ein Gedicht) zu „Freud und Leid durch lokale Ringe und Lokalisierungen“.
Hinweis. Bitte keine KI verwenden, sondern selbst kreativ sein!



Ist der Ring lokalisiert,
lebt es sich ganz ungeniert!

Abgabe bis 30. Juni 2026, 8:25, via Briefkasten/GRIPS